Applications linéaires

I/ Généralités

Exercice 1 : Montrer qu'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe (x', y') est linéaire si, et seulement si, il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que : $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$.

Trouver de même l'écriture analytique d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$; de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Généraliser à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On définit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathrm{E} \times \mathrm{F} \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y - f(x)) \end{array}$.

Montrer que ϕ est un automorphisme du $\mathbb{K}$-ev produit $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Exercice 3 :

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
$$f((1, 0, 0)) = (1, 1), \quad f((0, 1, 0)) = (0, 1) \quad \text{et} \quad f((0, 0, 1)) = (-1, 1).$$
Calculer $f((3, -1, 4))$ et $f((x, y, z))$ en général.
2. Déterminer $\ker(f)$ et en fournir une base.
3. Donner un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$.

Correction :

1. Si f existe alors nécessairement, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
$$f((x, y, z)) = xf((1, 0, 0)) + yf((0, 1, 0)) + zf((0, 0, 1)) = x(1, 1) + y(0, 1) + z(-1, 1) = (x - z, x + y + z).$$
On en déduit l'unicité de f.

Réciproquement, f ainsi définie vérifie bien les trois égalités de l'énoncé. Il reste donc à se convaincre que f est linéaire.

Soient $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) &= f((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z'))\\
&= ((\lambda x+\mu x')-(\lambda z+\mu z'), (\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'))\\
&= \lambda(x-z, x+y+z)+\mu(x'-z', x'+y'+z')\\
&= \lambda f((x,y,z))+\mu f((x',y',z')).
\end{aligned}$$

f est donc linéaire et convient. On en déduit l'existence de f.

On a alors $f((3,-1,4)) = (3-4, 3-1+4) = (-1,6)$.

Remarque : La démonstration de la linéarité de f ci-dessus est en fait superflue car l' exercice (1) qui est un résultat à connaître, donne l'expression générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f((x,y,z)) = (0,0) \Leftrightarrow (x-z, x+y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-2x \end{cases}$$

Donc, $\ker(f) = \{(x,-2x,x),\ x\in\mathbb{R}\} = \{x(1,-2,1),\ x\in\mathbb{R}\} = \text{vect}((1,-2,1))$. La famille $((1,-2,1))$ engendre $\ker(f)$ et est libre.

Donc, la famille $((1,-2,1))$ est une base de $\ker(f)$.

3. **Détermination de $\text{Im}(f)$:** Soit $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(x',y') \in \text{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ f((x,y,z)) = (x',y')\\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/ \begin{cases} x-z=x' \\ x+y+z=y' \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/ \begin{cases} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \text{le système d'inconnue } (x,y,z) : \begin{cases} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{cases} \text{ a au moins une solution.}
\end{aligned}$$

Or, le triplet $(0, x'+y', -x')$ est solution et le système proposé admet une solution.

Par suite, tout (x',y') de $\mathbb{R}^2$ est dans $\text{Im}(f)$ et finalement, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Détermination d'un supplémentaire de $\ker(f)$: Posons $e_1 = (1,-2,1)$, $e_2 = (1,0,0)$ et $e_3 = (0,1,0)$ puis $\text{F} = \text{vect}(e_2,e_3)$ et montrons que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \text{F}$.

Tout d'abord, $\ker(f) \cap \text{F} = \{0\}$. En effet :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f)\cap\text{F} &\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y,z) = ae_1 = be_2+ce_3\\
&\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/ \begin{cases} x=a=b \\ y=-2a=c \\ z=a=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0
\end{aligned}$$

Vérifions ensuite que $\ker(f)+\text{F} = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(f)+\text{F} &\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y,z) = ae_1+be_2+ce_3\\
&\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/ \begin{cases} a+b=x \\ -2a+c=y \\ a=z \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/ \begin{cases} a=z \\ b=x-z \\ c=y+2z \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système précédent (d'inconnue (a,b,c)) admet donc toujours une solution et on a montré que $\mathbb{R}^3 = \ker(f)+\text{F}$.

Finalement, $\mathbb{R}^3 = \ker(f)\oplus\text{F}$ et F est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Vérifions enfin que F est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$: On sait que $\mathrm{F} = \{(x, y, 0),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, 0) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$ est alors clairement un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}(f)\ (= \mathbb{R}^2)$.

Exercice 4 : Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\ker(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\ker(f)$.

Correction :

1. Par exemple $f(x, y) = (0, x)$ alors $\ker f = \mathrm{Im}\, f = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
2. Par exemple l'identité : $f(x, y) = (x, y)$. En fait un petit exercice est de montrer que les seules applications possibles sont les applications bijectives (c'est très particulier aux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).
3. L'application nulle : $f(x, y) = (0, 0)$. Exercice : c'est la seule possible !

Exercice 5 : Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}'. \end{array}$$

Même question si f est définie sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Exercice 6 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$.
2. $g : (x, y, z) \longmapsto (2x - y + z, 3x + y - z, x - 3y + 3z, 2x + 4y - 4z)$.
3. $h : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{X}\,(\mathrm{P}'(\mathrm{X} + 1) - \mathrm{P}'(1))$ de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ dans lui-même.
4. $k : \mathrm{M} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \mathrm{M}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Correction :

1. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc est clairement linéaire par linéarité à droite du produit matriciel.

Applications linéaires

$\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ donc f est injective donc surjective donc bijective d'après le théorème du rang. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donc, par exemple, $(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right)$.

2. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\3 & 1 & -1\\1 & -3 & 3\\2 & 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ donc est clairement linéaire par linéarité à droite du produit matriciel.

   $\ker(g) = \{(0,0,0)\}$ donc f est injective et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(g)$ est de dimension 3. L'application g n'est donc pas surjective.

   Pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(g)$, l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$, de trois vecteurs donc, suffira.

   Par exemple, $(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-4\end{pmatrix}\right)$ convient.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in\in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Par linéarité de la dérivation et les lois de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$,

$$\begin{aligned} h(\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q}) &= \mathrm{X}\Big((\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q})'(\mathrm{X}+1) - (\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q})'(1)\Big) \\ &= \lambda \mathrm{X}\Big(\mathrm{P}'(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}'(1)\Big) + \mathrm{X}\Big(\mathrm{Q}'(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}'(1)\Big) \\ &= \lambda h(\mathrm{P}) + h(\mathrm{Q}). \end{aligned}$$

   Donc h est linéaire.

   De plus, $\deg(\mathrm{X}(\mathrm{P}'(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}'(1))) \leqslant 1 + \deg(\mathrm{P}) - 1 \leqslant 3$ donc $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $h(\mathrm{P}) = \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

   $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $h(\mathrm{P}) = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{\mathrm{P}}'(\mathrm{X}+1) = \tilde{\mathrm{P}}'(1)$ par intégrité de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Donc $\tilde{\mathrm{P}}'$ est constante et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$. La réciproque étant évidente, $\ker(h) = \mathrm{vect}(1, \mathrm{X})$ et h n'est pas injective.

   Considérons l'image de la base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $(1, \mathrm{X}-1, (\mathrm{X}-1)^2, (\mathrm{X}-1)^3)$ de Taylor centrée en -1.

$$h(1) = h(\mathrm{X}-1) = 0,\ h((\mathrm{X}-1)^2) = 2\mathrm{X}^2,\ h((\mathrm{X}-1)^3) = 3\mathrm{X}^3.$$

   D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(h)$ est de dimension 2. Il est clair que $(\mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ en forme une base et que h n'est pas surjective.

4. La linéarité à droite du produit matriciel nous donne la linéarité de k

   En l'absence d'outils plus sophistiqués, soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}x & x'\\y & y'\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & x'+3y' \\ 3x+9y & 3x'+9y' \end{pmatrix}$$
$$= (x+3y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + (x'+3y')\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{Im}\,(k) \subset \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = k\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = k\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, on a aussi $\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) \subset \mathrm{Im}\,(k)$ et l'égalité.

En conclusion, $\mathrm{rg}\,(k) = 2$ et l'application n'est pas surjective dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4.

D'après le théorème du rang, on sait maintenant que $\ker(k)$ est de dimension 2 et que k n'est pas injective.

Pour trouver une base de $\ker(k)$, le plus facile est d'en trouver deux vecteurs (des matrices) non colinéaires.

Un petit calcul montre que $k\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = k\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ces matrices sont clairement libres dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ce qui suffit à conclure :

$$\ker(k) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice 7 :

1. Montrer que l'application $(x, y, z) \longmapsto (x+2y, 4x-y+z, 2x+2y+3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.
2. Proposer un exemple d'isomorphisme de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Exercice 8 : On définit f, g de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, par $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que f est surjective et non injective.
3. Montrer que g est injective et non surjective.

Correction :

1. Par linéarité de la dérivation et du produit des polynômes, f et g sont linéaires. Par définition de la dérivation des polynômes et du produit de polynômes, ce sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$

2. Soit $\mathrm{P} = \sum_{k \geqslant 0} a_k \mathrm{X}^k$ un polynôme. Il est assez clair que $\mathrm{Q} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_k}{k+1} \mathrm{X}^{k+1} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un antécédent de P par f qui est donc surjective.

   Pour tous $k \in \mathbb{K}^*$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}+k)$ donc f n'est pas injective.
3. Comme $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est intègre, $\mathrm{XP} = 0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]} \implies \mathrm{P} = 0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}$. La réciproque étant évidente, $\ker(g) = \left\{0_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}\right\}$ et g est injective.

   Par construction $\mathrm{Im}(g)$ est inclus dans les polynômes admettant 0 comme racine. Le polynôme constant à 1 n'admet donc pas d'antécédent et g n'est pas surjective.

Exercice 9 : On considère l'application f de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout polynôme P associe le réel $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la dimension de son noyau, et une base de ce noyau.

II/ Rang d'une application linéaire

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$, discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de $\mathrm{vect}(u, v, w)$ avec $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$.

Correction : Soit $x\,(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \in \mathrm{vect}(u, v, w)$. Il existe alors $(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = x_1 u + x_2 v + x_3 w \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & = & x_1 a & + & x_2 & + & x_3 \\ \beta & = & x_1 & + & a x_2 & + & x_3 \\ \gamma & = & x_1 & + & x_2 & + & a x_3 \end{array}\right.$$

Si $a \neq 0$, alors :

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & = & x_1 a & + & x_2 & + & x_3 \\ a\beta - \alpha & = & & & (a^2-1)x_2 & + & (a-1)x_3 \\ a\gamma - \alpha & = & & + & (a-1)x_2 & + & (a^2-1)x_3 \end{array}\right.$$

Si $a \neq -1$ alors :

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & = & x_1 a & + & x_2 & + & x_3 \\ a\beta - \alpha & = & & & (a^2-1)x_2 & + & (a-1)x_3 \\ -a\alpha - a\beta + a(a+1)\gamma & = & = & & & & a(a-1)(a+2)x_3 \end{array}\right.$$

En conclusion,

— si a est différent de 0, 1 et -2, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est déterminer de manière unique : $\mathrm{vect}(u, v, w)$ est de rang 3.

— si $a = -2$, le système est compatible si, et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 0$: $\mathrm{vect}(u, v, w)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ et de dimension 2.

— si $a = 1$, alors $x = x_1u + x_2v + x_3w \iff \alpha = \beta = \gamma$: c'est une droite de système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$ ou de paramétrisation $\text{vect}\,((1\,;1\,;1))$ de dimension 1.

— si $a = 0$, $x = x_1u+x_2v+x_3w \iff \begin{cases} \alpha = x_2 + x_3 \\ \beta = x_1 + x_3 \\ \gamma = x_1 + x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2\alpha + \beta + 2\gamma \\ x_2 = \alpha - 2\beta + 2\gamma \\ x_3 = \dfrac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \end{cases}$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est déterminé de manière unique : $\text{vect}\,(u, v, w)$ est de rang 3.

Exercice 11 : Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

Déterminer le rang de f.

Exercice 12 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1. Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $f \circ g = 0$.

   Montrer que $\text{rg}\,(f) + \text{rg}\,(g) \leqslant n$.
2. On ajoute l'hypothèse : $f + g \in \mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

   Montrer que $\text{rg}\,(f) + \text{rg}\,(g) = n$.

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z, t)) = (x + y + z + 2t, y - z + t, x - y + 3z)$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Démontrer que $\ker\,(f) = \text{vect}\,((1, 1, 0, -1), (-3, 0, 1, 1))$.
3. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^4$, calculer le rang de $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ et déterminer une base de $\text{Im}\,(f)$.
4. Vérifier le théorème du rang.

Correction :

1. f est linéaire : AQT !
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in \ker\,(f) &\iff f((x, y, z, t)) = (0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ y - z + t = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ y - z + t = 0 \\ -2y + 2z - 2t = 0 \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2t = -y - z \\ t = -y + z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 2z \\ t = -y + z \end{cases} \\
&\iff (x, y, z, t) = (y - 3z, y, z, -y + z) \\
&\iff (x, y, z, t) \in \text{vect}\,((1, 1, 0, -1), (-3, 0, 1, 1))
\end{aligned}$$

Donc
$$\ker(f) = \mathrm{vect}\left((1,1,0,-1),(-3,0,1,1)\right).$$

3. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$: base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,0,1) \\ f(e_2) = (1,1,-1) \\ f(e_3) = (1,-1,3) \\ f(e_4) = (2,1,0) \end{cases}$$

— On a $f(e_4) = f(e_1) + f(e_2)$ d'où
$$\mathrm{rg}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{rg}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

— On a $f(e_3) = 2f(e_1) - f(e_2)$ d'où
$$\mathrm{rg}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{rg}\,(f(e_1), f(e_2))$$

— La famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre donc
$$\mathrm{rg}\,(f(e_1), f(e_2)) = 2$$

$$\mathrm{rg}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = 2.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ &= \mathrm{vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \mathrm{vect}\,(f(e_1), f(e_2)) \end{aligned}$$

La famille $(f(e_1), f(e_2))$ engendre $\mathrm{Im}\,(f)$.

Or, on a vu qu'elle était libre.

Donc, $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
$$\mathrm{rg}\, f = 2.$$

La formule du rang est bien vérifiée :
$$\begin{cases} \dim\ker(f) + \mathrm{rg}\, f = 2+2 = 4 \\ \dim \mathbb{R}^4 = 4 \end{cases}$$

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

On suppose $\mathrm{E} = \ker(f) + \ker(g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 15 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

À l'aide du théorème du rang, montrer que :

$$\ker(u) = \ker\left(u^2\right) \iff \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(u^2\right) \iff \mathrm{E} = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u).$$

Exercice 16 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x\,;2x-y) \end{array}$ Montrer que $f \in \mathscr{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 17 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$, on considère $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ par $f(1) = 1+i$ et $f(i) = 3-i$.

Montrer que f est un automorphisme.

III/ Endomorphismes remarquables

Exercice 18 : Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $p((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$.

1. Montrer que p est linéaire.
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Déterminer une base de $\ker(p)$ et de $\mathrm{Im}(p)$.

Exercice 19 : Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}, 0\right)$.

1. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ?
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. f est-elle un projecteur ?

Exercice 20 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Démontrer que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \iff \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ est un projecteur.

Exercice 21 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

On suppose que p et q commutent. Montrer que $p \circ q$ est la projection de E sur $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ de direction $\ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 22 : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$p+q \text{ projecteur } \iff p\circ q = q\circ p = 0 \iff \mathrm{Im}\,(p) \subset \ker(q) \text{ et } \mathrm{Im}\,(q) \subset \ker(p).$$

Dans le cas où $p+q$ est un projecteur, déterminer $\ker(p+q)$ et $\mathrm{Im}\,(p+q)$.

Correction : On montre la première équivalence :

$\Rightarrow$ **:** Si $p+q$ est un projecteur alors l'égalité $(p+q)^2 = p+q$ fournit $p\circ q + q\circ p = 0$.

En composant par p à droite et à gauche, on obtient $p\circ q\circ p + q\circ p = 0 = p\circ q + p\circ q\circ p$ et donc $p\circ q = q\circ p$.

Cette égalité jointe à l'égalité $p\circ q + q\circ p = 0$ fournit $p\circ q = q\circ p = 0$.

$\Leftarrow$ **:** Si $p\circ q = q\circ p = 0$, alors $(p+q)^2 = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q$ et $p+q$ est un projecteur.

Finalement, pour tous projecteurs p et q, ($p+q$ projecteur $\iff p\circ q = q\circ p = 0$.

La seconde est relativement claire.

Dorénavant, $p+q$ est un projecteur ou ce qui revient au même $p\circ q = q\circ p = 0$.

On a toujours $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(p+q)$.

Réciproquement, pour $x \in \mathrm{E}$,

$$x \in \ker(p+q) \implies (p+q)(x) = 0 \implies p(p(x)+q(x)) = 0 \implies p(x) = 0,$$

et de même $q(x) = 0$.

Ainsi, $\ker(p+q) \subset \ker(p) \cap \ker(q)$ et donc $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

On a toujours $\mathrm{Im}\,(p+q) \subset \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$.

Réciproquement, pour $x \in \mathrm{E}$,

$$x \in \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q) \implies \exists (x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2 /\ x = p(x_1) + q(x_2).$$

Mais alors, $(p+q)(x) = p^2(x_1) + p\circ q(x_1) + q\circ p(x_2) + q^2(x_2) = p(x_1) + q(x_2) = x$ et donc $x \in \mathrm{Im}\,(p+q)$.

Ainsi, $\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q) \subset \mathrm{Im}\,(p+q)$ et donc $\mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$.

En résumé, si p et q sont deux projecteurs tels que $p+q$ soit un projecteur, alors

$$\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)\,.$$

Exercice 23 : On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on associe l'élément $\mathrm{T}(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Correction : T est clairement un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

De plus, pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{T}\circ\mathrm{T})(f)(x) = f(-(-x)) = f(x).$$

Donc $\mathrm{T}\circ\mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})}$ et T est la symétrie par rapport à $\mathcal{P} = \ker\left(\mathrm{T} - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})}\right)$ parallèlement à $\mathcal{I} = \ker\left(\mathrm{T} + \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})}\right)$.

Or, $f \in \mathcal{P} \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \iff f$ est paire.

De même, $f \in \mathcal{I} \iff f$ est impaire.

Ainsi, on retrouve de cette manière que $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 24 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

On pose $\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E};\, f(x) = ix\}$ et $\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E};\, f(x) = -ix\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. Déterminer l'expression de f en fonction des projecteurs p et q associés à la somme directe précédente.

Correction :

1. AQT
2. $f = f - p(f) + f - q(f)$ en se rappelant que $p + q = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Applications linéaires