

Dimension finie

Exercice 1 : Vrai ou faux ...

1. Dans $\mathbb{K}^4$, $ax + by + cz + dt = 0$ avec $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ est une équation définissant un sous-espace vectoriel de dimension 3
2. Pour toutes matrices carrées d'ordre p , A et B et tout naturel n , $(AB)^n = A^n B^n$
3. Toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie a un cardinal supérieur ou égal à toute famille libre.

1. V : C'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On verra que c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ donc de dimension 3.
2. F : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. V : *confer* cours.

Exercice 2 : Montrer que dans $\mathbb{K}[X]$, la famille constituée par un polynôme P de degré n , ainsi que ses polynômes dérivés P' , P'' , ..., $P^{(n)}$ est libre.

Comme $\deg(P) = n$, la famille $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une famille de polynômes non nuls étagée par les degrés donc libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 3 : Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\text{Id}_E$. Soient $V = \{x \in E, f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E, f(x) = -ix\}$.

Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

$V = \ker(f - i\text{Id}_E)$ et $W = \ker(f + i\text{Id}_E)$ sont déjà des sev de E .

Comme, $\forall x \in E, ix = -ix \iff x = 0$, la somme directe l'est tout autant.

De plus, $\forall x \in E$, on peut écrire $x = \frac{ix + f(x)}{2i} + \frac{ix - f(x)}{2i}$.

Or, par linéarité de f et $f^2 = -\text{Id}_E$, on a aussi :

$$f\left(\frac{ix + f(x)}{2i}\right) = \frac{if(x) - x}{2i} = i \frac{ix + f(x)}{2i} \implies \frac{ix + f(x)}{2i} \in V.$$

Et

$$f\left(\frac{ix - f(x)}{2i}\right) = \frac{if(x) + x}{2i} = -i \frac{ix - f(x)}{2i} \implies \frac{ix - f(x)}{2i} \in W.$$

Les espaces V et W sont donc aussi générateurs de E donc ils y sont supplémentaires :

$$E = V \oplus W.$$