

Intégration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \sin(\pi x) dx$.

(a) Calculer I_0 .

(b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(a) $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x) dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$.

(b) $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$. Par croissance de l'intégrale, on a alors :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

(c) D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.

En posant $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ continue sur $[0; 1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \ln(2).$$

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

(b) En déduire la forme explicite de $I_n = \int_{-1}^0 \frac{x^n}{1-x} dx$.

(c) (★) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

(a) Pour $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ i.e. $\frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

(b) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^0 \frac{x^n}{1-x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^0 x^k dx \\ &= \left[-\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^0 = \ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

(c) Sur $[-1; 0]$, $0 \leq \frac{1}{1-x} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq |I_n| \leq \int_{-1}^0 |x|^n dx = \left[\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right) = 0$.

En conséquence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Intégration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \cos(\pi x) \, dx$.

(a) Calculer I_0 .

(b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(a) $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \, dx = \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$.

(b) $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \cos(\pi x) \leq 1$. Par croissance de l'intégrale, on a alors :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \, dx = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

(c) D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2 + n^2}$.

En posant $f : x \mapsto \frac{t}{t^2 + 1}$ continue sur $[0; 1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2 + n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 1} \, dt = \left[\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2).$$

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

(b) En déduire la forme explicite de $I_n = \int_{-1}^0 \frac{x^n}{1-x} \, dx$.

(c) (★) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

(a) Pour $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ i.e. $\frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

(b) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^0 \frac{x^n}{1-x} \, dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} \, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^0 x^k \, dx \\ &= \left[-\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{-1}^0 = \ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

(c) Sur $[-1; 0]$, $0 \leq \frac{1}{1-x} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq |I_n| \leq \int_{-1}^0 |x|^n dx = \left[\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right) = 0$.

En conséquence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.