

Zéta(2m)

On se propose dans ce devoir de trouver la valeur de $\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$.

I. Polynômes de Bernoulli

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer l'existence et l'unicité d'une application $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], & F'(x) = f(x) \\ \int_0^1 F(t) dt = 0. \end{cases}$$

2. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que $B_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \forall x \in [0, 1], & B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \\ \int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0. \end{cases}$$

Calculer B_n pour $n \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$. Les B_n sont appelés *polynômes de Bernoulli*.

3. Préciser le degré et le coefficient dominant de B_n .
4. (a) Pour $n \geq 2$, établir la relation $B_n(1) = B_n(0)$.
 (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $B_n^{(k)}$ en fonction de B_{n-k} .
 (c) Avec la formule de Taylor, établir pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(0) = 0$.
 (d) En déduire la valeur exacte des $B_n(0)$ pour $n \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$. Les $B_n(0)$ sont appelés *nombre de Bernoulli*.

II. Calcul des $\zeta(2m)$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$, montrer que $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$.

2. Pour $n \geq 2$, on définit l'application $\phi_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}.$$

- (a) Prolonger ϕ_n par continuité sur $[0, 1]$.
 (b) Montrer que le prolongement, encore noté ϕ_n , est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
 (c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \phi_n(t) \sin(\lambda t) dt$.

Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \phi_n(t) \sin(\lambda t) dt \right) = 0$.

3. Pour $(m, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $I_{m,k} = \frac{1}{(2m)!} \int_0^1 B_{2m}(t) \cos(2k\pi t) dt$.
- Pour $m \geq 2$, trouver une relation entre $I_{m,k}$ et $I_{m-1,k}$.
 - Calculer $I_{1,k}$.
 - En déduire $I_{m,k}$ pour tout $(m, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
4. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, exprimer l'intégrale $\int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt$ en fonction de $B_{2m}(0)$ et des $I_{m,k}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
5. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ donnée par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}}$ converge. On note $\zeta(2m)$ sa limite.
- Prouver que $\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}}{(2m)!} B_{2m}(0) \pi^{2m}$.
6. Calculer $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\zeta(8)$ et $\zeta(10)$.