Probabilités, Algèbre et Analyse

31 octobre 2025

Durée : **4** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.

Problème 1 – Soit E un espace vectoriel réel quelconque, et f un endomorphisme de E.

Partie 1 : Préliminaire

1. Montrer que : $\forall\,(g,h) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2, \quad g \circ h = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})} \iff \mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Partie 2 : Avec un polynôme de degré 2

2. Soit $u \in \mathrm{E}$. Déterminer des réels λ et μ tels que : $u = \lambda(f(u) - 2u) + \mu(f(u) - u)$.

3. En déduire que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

On suppose désormais, et dans cette partie uniquement, que :

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}.$$

4. À l'aide du préliminaire, montrer que :

$$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}).$$

5. En déduire que : $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

6. On suppose dans cette question que E est de dimension finie.
Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\forall\, u \in \mathscr{B}$, $f(u)$ et u sont colinéaires.

Partie 3 : Avec un polynôme de degré 3

7. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E}) \cap \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E}) = \{0_\mathrm{E}\}$.

On suppose désormais que :

$$f^3 = \mathrm{Id_E}.$$

8. Soit $u \in \mathrm{E}$. On pose :

$$v = \frac{1}{3}(2u - f^2(u) - f(u)) \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u).$$

   (a) Calculer $(f^2+f+\mathrm{Id_E})(v)$ et $(f-\mathrm{Id_E})(w)$.
   (b) Vérifier que $u = v + w$. Quelle inclusion ensembliste a-t-on montrée ?
   Justifier avec soin.

9. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E}) \oplus \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E}).$$

Problème 2 – On souhaite calculer l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$, appelée *intégrale de Wallis.*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

On admet que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie*

$$\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   En déduire que F est bornée.

4. En déduire que F converge en $+\infty$.

   On notera $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *cette limite. C'est juste une notation.*

5. Justifier que pour tout $u \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+u) \leqslant u$. (La convexité n'est pas au programme de PTSI)

6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(\sqrt{n})$.
   (b) À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, en déduire que :
   $$\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1} \leqslant \mathrm{F}(\sqrt{n}).$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer que : $\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$.
   (b) À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, en déduire que :
   $$\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} \int_0^{\mathrm{B}} \cos^{2p}(t)\ \mathrm{d}t,$$
   où $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à préciser.
   (c) En déduire que : $\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2}$.

8. Conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Problème 3 – Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Une urne possède $2n$ boules : n blanches et n noires. On vide l'urne en effectuant successivement n tirages en piochant simultanément deux boules à chaque tirage.

On note alors :

S_n : « obtenir lors des n tirages deux boules de couleur différente à chaque fois »

et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

A_k : « obtenir deux boules de couleur différente lors du k-ième tirage. »

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \mid \mathrm{A}_k)$ la probabilité conditionnelle de l'événement S_n sachant que A_k s'est produit.

Partie 1 : Tout ce qui peut arriver, finit toujours par arriver

1. Si $n = 1$, préciser p_1.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer S_n en fonction des A_k.

3. Justifier sans calcul que $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} \mid \mathrm{A}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n)$.

4. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

5. Cette suite converge-t-elle ?

Partie 2 : Il n'y a que les deux premiers tirages qui coûtent

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

6. Combien y a-t-il de configurations possibles pour le premier tirage (les boules, y compris celles de même couleur, sont toutes supposées discernables) ?

7. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{A}_1)$ et l'écrire comme le quotient de deux entiers.

8. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \,|\, \mathrm{A}_1)$.

On introduit également les évènements :

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_1 &: \text{« obtenir deux boules blanches au premier tirage »}, \\ \mathrm{N}_1 &: \text{« obtenir deux boules noires au premier tirage »}. \end{aligned}$$

9. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{B}_1)$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \,|\, \mathrm{B}_1)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{N}_1)$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \,|\, \mathrm{N}_1)$.

10. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_2)$.

11. Les évènements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

12. Calculer la probabilité d'avoir obtenu deux boules de même couleur au premier tirage sachant que l'on a obtenu deux boules de même couleur au deuxième tirage.

Partie 3 : Y'a toujours une partie plus diff... rigolote !

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose : $\mathrm{B}_k = \displaystyle\bigcap_{i \in [\![1;k]\!]} \mathrm{A}_i$.

13. Montrer que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k \,|\, \mathrm{B}_{k-1}) = \dfrac{n-k+1}{2n-2k+1}$.

14. Exprimer en fonction de $n!$, $(2n)!$ et 2^n les quantités

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

15. Montrer que $p_n = \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

16. Sachant que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, en déduire un équivalent simple de p_n quand $n \to +\infty$, puis préciser sa limite.