Probabilités, Algèbre et Analyse

Problème 1 – Soit E un espace vectoriel réel quelconque, et f un endomorphisme de E.

Partie 1 : Préliminaire

1. Montrer que : $\forall\,(g,h)\in\mathscr{L}(\mathrm{E})^2,\quad g\circ h=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})} \iff \mathrm{Im}(h)\subset\mathrm{Ker}(g)$.

Correction : Soient $(g,h)\in\mathcal{L}(\mathrm{E})^2$.

$\Rightarrow$: Supposons que $g\circ h=0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Soit $y\in\mathrm{Im}(h)$. Alors, il existe $x\in\mathrm{E}$ tel que $y=h(x)$.
Mais alors, $g(y)=g(h(x))=0_{\mathrm{E}}$. D'où $y\in\mathrm{Ker}(g)$.
Cela permet de conclure que : $\mathrm{Im}(h)\subset\mathrm{Ker}(g)$.

$\Leftarrow$: Réciproquement, si $\mathrm{Im}(h)\subset\mathrm{Ker}(g)$, alors pour tout $x\in\mathrm{E}$, $h(x)\in\mathrm{Ker}(g)$ donc $g(h(x))=0_{\mathrm{E}}$.
Cela étant vrai pour tout $x\in\mathrm{E}$, $g\circ h=0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Par double-implication, l'équivalence est démontrée.

Commentaires : *Assez mal fait en général. J'aurais pu ne jamais mettre tous les points. Pensez que c'est la première impression que vous donnez au correcteur donc appliquez-vous !*

Partie 2 : Avec un polynôme de degré 2

2. Soit $u\in\mathrm{E}$. Déterminer des réels λ et μ tels que : $u=\lambda(f(u)-2u)+\mu(f(u)-u)$.

Correction : Si on ne voit pas la décomposition, un raisonnement par analyse-synthèse y arrivera à coup sûr :

Soit $u\in\mathrm{E}$. On cherche $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$u=\lambda(f(u)-2u)+\mu(f(u)-u)$$

i.e.

$$u=(\lambda+\mu)f(u)-(2\lambda+\mu)u.$$

Il suffit alors de chercher des réels λ et μ tels que :

$$\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ -2\lambda-\mu=1\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \mu=1\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda=-1\\ \mu=1\end{cases}.$$

Ainsi, on peut prendre $\lambda=-1$ et $\mu=1$.

Commentaires : *Pas besoin de blabla. Si vous voyez les coefficients. Dites-le et point. On ne vous demande même pas l'unicité.*

3. En déduire que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Correction : D'une part, l'inclusion $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$ est triviale car la somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
D'autre part, pour tout $u \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} u &= -(f(u) - 2u) + (f(u) - u) \\ &= \underbrace{-(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})(u)}_{\in \mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})} + \underbrace{(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})(u)}_{\in \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_\mathrm{E})} \in \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{E} \subset \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
D'où, par double inclusion, $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Commentaires : *Souvent oubliée, l'inclusion réciproque. Heureusement que le correcteur est très gentil.*

On suppose désormais, et dans cette partie uniquement, que :

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}.$$

4. À l'aide du préliminaire, montrer que :

$$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}).$$

Correction : On applique le préliminaire avec $g = f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $h = f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. On a :

$$(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

D'où, $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

De même,

$$(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

D'où, $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

5. En déduire que : $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Correction : Comme $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ d'après (3), et grâce aux inclusions de (4), on obtient :

$$\mathrm{E} \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$$

puis l'égalité avec l'inclusion réciproque évidente.

Montrons que cette somme est directe.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$, alors $f(x) = 2x$ et $f(x) = x$ *i.e.* $2x = x$ et $x = 0_\mathrm{E}$. Ainsi, la somme est directe et on a :

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}).$$

Commentaires : *Même commentaire qu'à la* (3).

6. On suppose dans cette question que E est de dimension finie.
Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\forall\, u \in \mathscr{B},\ f(u)$ et u sont colinéaires.

Correction : Si E est de dimension finie, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ le sont aussi.
Notons $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases respectives de ces deux sous-espaces.

On pose $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ *i.e.* la concaténation des deux bases.

Alors, comme $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$, $\mathscr{B}$ est une base de E.
Montrons que pour tout $u \in \mathscr{B}$, $f(u)$ et u sont colinéaires.

Soit $u \in \mathscr{B}$. On a alors $u \in \mathscr{B}_1$ ou $u \in \mathscr{B}_2$ (le « ou » n'est pas exclusif).

Ainsi, $u \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ ou $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ *i.e.* $f(u) = 2u$ ou $f(u) = u$.
Dans les deux cas, u et $f(u)$ sont colinéaires.

On a bien exhibé une base $\mathscr{B}$ de E vérifiant la propriété demandée.

Commentaires : *Question peu faite. Vous avez oublié de vous demandé à quoi servaient les questions précédentes.*

Partie 3 : Avec un polynôme de degré 3

7. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Correction : Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. On a :

$$f^2(x) + f(x) + x = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad f(x) = x.$$

En remplaçant $f(x) = x$, on obtient $3x = 0_{\mathrm{E}}$, donc $x = 0_{\mathrm{E}}$.

D'où $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \subset \{0_{\mathrm{E}}\}$.
L'inclusion réciproque étant triviale, on a :

$$\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

Commentaires : *La somme est donc directe.*

On suppose désormais que :

$$f^3 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}.$$

8. Soit $u \in \mathrm{E}$. On pose :

$$v = \frac{1}{3}(2u - f^2(u) - f(u)) \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u).$$

(a) Calculer $(f^2 + f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(v)$ et $(f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(w)$.

Probabilités, Algèbre et Analyse

Correction : Comme demandé, on calcule :

$$(f^2+f+\mathrm{Id_E})(v) = \frac{1}{3}(2(f^2+f+\mathrm{Id_E})(u) - (f^2+f+\mathrm{Id_E})(f^2(u)) - (f^2+f+\mathrm{Id_E})(f(u))),$$

par linéarité de l'application $f^2+f+\mathrm{Id_E}$.
Comme $f^3 = \mathrm{Id_E}$, on a :

$$\begin{aligned}(f^2+f+\mathrm{Id_E})(v) &= \frac{1}{3}(2f^2(u)+2f(u)+2u - \underbrace{f^4(u)}_{=f(u)} - \underbrace{f^3(u)}_{=u} - f^2(u) - \underbrace{f^3(u)}_{=u} - f^2(u) - f(u)) \\ &= 0_E.\end{aligned}$$

De même, $(f-\mathrm{Id_E})(w) = 0_E$.

(b) Vérifier que $u = v + w$. Quelle inclusion ensembliste a-t-on montrée ?
Justifier avec soin.

Correction : On vérifie :

$$v + w = \frac{1}{3}(2u - f^2(u) - f(u) + f^2(u) + f(u) + u) = u.$$

D'après la question précédente, $v \in \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E})$ et $w \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E})$.

On a donc finalement montré que tout élément u de E se décompose sous la forme d'une somme d'un élément v de $\mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E})$ et d'un élément w de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E})$.

Ainsi, on a :

$$\mathrm{E} \subset \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E}) + \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E}).$$

L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on a :

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E}) + \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E}).$$

9. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E}) \oplus \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E}).$$

Correction : En regroupant les résultats des questions (7) et (8b), on obtient :

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id_E}) \oplus \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id_E}).$$

Problème 2 – On souhaite calculer l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{F} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$, appelée *intégrale de Wallis*.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose $s = \frac{\pi}{2} - t$ *i.e.* $t = \frac{\pi}{2} - s$.

La fonction $t \longmapsto \frac{\pi}{2} - t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante et $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}t$.

Alors, par ce changement de variable, on obtient :

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - s\right)(-\mathrm{d}s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(s))^n \mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$

Commentaires : *Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ marchait aussi mais passait de toute manière par un changement de variable. Ah ! la trigonométrie et se rappeler que $\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$!*

En l'absence de relation de récurrence, une démonstration du même nom ne pouvait aboutir.

Je félicite tous ceux qui ont eu l'audace de penser que l'on pouvait calculer directement ces intégrales. Quatre siècles de mathématiciens éminents vous envient un tel talent.

On admet que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Correction :

Méthode 1 : Soit $(x;y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x < y$. Alors, par la relation de Chasles :

$$\mathrm{F}(y) = \int_0^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} > 0$, d'où $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t > 0$.

Ainsi, $\mathrm{F}(y) > \mathrm{F}(x)$.

Méthode 2 : L'application $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors d'après le théorème fondamental de l'analyse (TFA), F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \mathrm{F}'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0.$$

Dans les deux cas, on conclut que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Commentaires : *Non ! la primitive d'une fonction croissante n'est pas croissante !*

3. Montrer que :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire que F est bornée.

Correction :

— Pour tout $t \geqslant 1$, on a $t^2 \geqslant t$, donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

Ainsi pour tout $x \geqslant 1$, par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \Big[- \mathrm{e}^{-t} \Big]_1^x = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

D'après la relation de Chasles, on a alors :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

— D'autre part, pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$, et donc par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{F}(x) \geqslant 0$.

Ainsi :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}.$$

Commentaires : *À ce stade, on ne peut pas encore en conclure que F est bornée à cause de e^{-x} qui n'est pas constant.*

En particulier, on a :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-1}.$$

Comme $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0\,;1]$, son intégrale y est définie *i.e.* bornée.

De même, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$, continue sur $\mathbb{R}_+$ converge vers 0 en $+\infty$ donc est bornée également.

Tout cela pour dire que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

4. En déduire que F converge en $+\infty$.

Correction : F est croissante et majorée , donc elle converge quand $x \to +\infty$ d'après le théorème de convergence monotone.

Commentaires : *Cette question et la (5) du problème 3 ont été bien faites. J'aurais au moins réussi à vous enseigner un théorème.*

On notera $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *cette limite. C'est juste une notation.*

5. Justifier que pour tout $u \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+u) \leqslant u$.

Correction : Commentaires : *L'étude de la fonction $x \longmapsto \ln(1+u) - u$ est la démarche à suivre mais pour la pédagogie et faire attention, on peut aussi le démontrer par le théorème des accroissements finis.*

Soit $u \in]-1\,;+\infty[$. La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $[1, 1+u]$ ou $[1+u\,;1] \subset]0\,;+\infty[$.

— Si $u \in [0\,;+\infty[$ alors la dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de $\ln$ est majorée par 1. D'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient donc

$$\ln(1+u) - \ln(1) \leqslant 1\,(1+u-1) \iff \ln(1+u) \leqslant u.$$

— Soit $u \in]-1\,;0[$.

Le théorème des accroissements finis, nous assure l'existence d'un $c \in [1+u\,;1]$ tel que :

$$\ln(1+u) - \ln(1) = \frac{1}{c}u \iff \ln(1+u) \leqslant \frac{u}{c}.$$

Or, $c \in [1+u\,;1] \implies 1 \leqslant \dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{1+u}$ puis, avec $u < 0$, $\dfrac{u}{1+u} \leqslant \dfrac{u}{c} \leqslant u$.

En particulier, $\dfrac{u}{c} \leqslant u$ et le résultat.

Dans tous les cas, on a montré que :

$$\forall\, u \in]-1\,;+\infty[\,,\ \ln(1+u) \leqslant u.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

(a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(\sqrt{n})$.

Correction : Pour $t \in [0\,;\sqrt{n}[$, on a $-\dfrac{t^2}{n} \in]-1\,;0]$, donc $\ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t^2}{n}$ d'après la question précédente.

Ainsi, comme $1 - \dfrac{t^2}{n} > 0$, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\forall t \in [0\,;\sqrt{n}[,\quad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}.$$

De plus, pour $t = \sqrt{n}$, on a $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.
En outre, par croissance de l'intégrale et car $0 \leqslant \sqrt{n}$, on a, en intégrant entre 0 et $\sqrt{n}$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(\sqrt{n}).$$

(b) À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, en déduire que :

$$\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1} \leqslant \mathrm{F}(\sqrt{n}).$$

Correction : Posons $t = \sqrt{n}\cos(u) \iff \cos(u) = \dfrac{t}{\sqrt{n}} \iff u = \arccos\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)$, changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissant entre $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $[0\,;\sqrt{n}]$. On a :

$$\mathrm{d}t = -\sqrt{n}\sin(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad t \in [0;\sqrt{n}] \iff u \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1-\cos^2(u)\right)^n \left(-\sqrt{n}\sin(u)\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1}.\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on conclut que :

$$\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1} \leqslant \mathrm{F}\left(\sqrt{n}\right).$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

(a) Montrer que : $\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$.

Correction : Pour $t \in [0\,;\sqrt{n}]$, on a $\dfrac{t^2}{n} \in [0\,;1]$ donc $\ln\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant \dfrac{t^2}{n}$.

Ainsi, comme $1 + \dfrac{t^2}{n} > 0$, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall t \in [0,\sqrt{n}],\quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Enfin, la croissance de l'intégrale et $0 \leqslant \sqrt{n}$ nous assure que :

$$\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

(b) À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, en déduire que :

$$\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\mathrm{B}} \cos^{2p}(t)\ \mathrm{d}t,$$

où $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à préciser.

Correction : Posons $t = \sqrt{n}\tan(u) \iff u = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissant entre $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et $[0\,;\sqrt{n}]$.

On a :

$$\mathrm{d}t = \sqrt{n}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)}, \quad 1+\frac{t^2}{n} = \frac{1}{\cos^2(u)} \quad \text{et} \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \iff t \in [0; \sqrt{n}].$$

et on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{n\tan^2(u)}{n}\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)}\ \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(u))^{-n}\frac{1}{\cos^2(u)}\ \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2(u)}\right)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\cos^2(u)}\ \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\ \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que :

$$\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\ \mathrm{d}u.$$

On obtient bien l'inégalité demandée avec $\mathrm{B} = \frac{\pi}{4}$ et $p = n-1$.

Commentaires : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$. *Désolé mais ce n'est pas moi !*

(c) En déduire que : $\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2}$.

Correction : On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2} &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u + \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(relation de Chasles).}\end{aligned}$$

Or, pour tout $u \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{2(n-1)}(u) \geqslant 0$ et donc $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \geqslant 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2} &\geqslant \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \mathrm{F}(\sqrt{n}) \quad \text{d'après (7b).}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2}.$$

8. Conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction : D'après les résultats des questions (6b) et (7c), on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1} \leqslant \mathrm{F}(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2}.$$

Or, d'après l'aide de l'énoncé,

$$\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et

$$\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Autrement dit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\mathrm{W}_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

De plus, d'après la question (4) et par composition des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}(\sqrt{n}) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La conservation des inégalités larges à la limite permet alors de conclure :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Commentaires : *Le théorème d'encadrement seul permettrait juste de montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème 3 – Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Une urne possède $2n$ boules : n blanches et n noires. On vide l'urne en effectuant successivement n tirages en piochant simultanément deux boules à chaque tirage.

On note alors :

S_n : « obtenir lors des n tirages deux boules de couleur différente à chaque fois »

et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

A_k : « obtenir deux boules de couleur différente lors du k-ième tirage. »

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \mid \mathrm{A}_k)$ la probabilité conditionnelle de l'événement S_n sachant que A_k s'est produit.

Partie 1 : Tout ce qui peut arriver, finit toujours par arriver

1. Si $n = 1$, préciser p_1.

Correction : Si $n = 1$, l'urne ne possède que deux boules : 1 blanche et 1 noire et nous n'effectuons qu'un seul tirage qui retourne cette unique boule blanche et cette unique boule noire.

On a donc $p_1 = 1$.

Commentaires : *Tous ceux qui se sont trompés ont oublié que les dénombrements consistaient à construire à la main.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer S_n en fonction des A_k.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour obtenir uniquement des boules de couleurs distinctes à chaque tirage, il faut et il suffit que ce soit le cas au premier tirage, au deuxième et ainsi de suite jusqu'au n-ième. Donc,

$$\mathrm{S}_n = \bigcap_{k \in [\![1;n]\!]} \mathrm{A}_k.$$

3. Justifier sans calcul que $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} \mid \mathrm{A}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n)$.

Correction : On regarde la probabilité de réaliser S_{n+1} sachant que A_1 est réalisé.

Puisque l'on regarde S_{n+1} c'est que l'on considère une urne avec $2(n+1) = 2n+2$ boules.

On suppose A_1 réalisé, nous avons donc obtenu deux boules de couleurs différentes lors du premier tirage.

Sachant cela, il nous reste alors $2(n+1) - 2 = 2n$ boules et l'on doit, dans tous les tirages suivants, obtenir deux boules de couleur différente pour avoir S_{n+1}.

Cet événement correspond exactement à S_n.

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} \mid \mathrm{A}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n).$$

Probabilités, Algèbre et Analyse

4. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Par définition et d'après la question précédente, $p_n = \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} \mid A_1) = \dfrac{\mathbb{P}(S_{n+1}\cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)}$ avec $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$.

Or, d'après (2), $\mathbb{P}(S_{n+1}\cap A_1) = P\left(\bigcap_{k\in[\![1;n+1]\!]} A_k \cap A_1\right) = P\left(\bigcap_{k\in[\![1;n+1]\!]} A_k\right) = \mathbb{P}(S_{n+1}) = p_{n+1}$.

D'où, $p_n = \dfrac{p_{n+1}}{\mathbb{P}(A_1)} \geqslant p_{n+1}$ car $\mathbb{P}(A_1) \leqslant 1$.

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc décroissante.

5. Cette suite converge-t-elle ?

Correction : La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée par 0 en tant que probabilité donc converge vers un réel positif d'après le théorème de limite monotone.

Partie 2 : Il n'y a que les deux premiers tirages qui coûtent

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

6. Combien y a-t-il de configurations possibles pour le premier tirage (les boules, y compris celles de même couleur, sont toutes supposées discernables) ?

Correction : Lors du premier tirage, on pioche simultanément deux boules parmi $2n$ (car toutes les boules sont distinctes). Cela revient à chercher le nombre de parties à 2 éléments dans un ensemble à $2n$.

Par conséquent, on a $\dbinom{2n}{2}$ configurations possibles pour le premier tirage.

7. En déduire $\mathbb{P}(A_1)$ et l'écrire comme le quotient de deux entiers.

Correction : Pour obtenir deux boules de couleurs différentes lors du premier tirage, on choisit la boule blanche : n choix, puis la boule noire : n choix également.

Donc le nombre de configurations retournant deux boules de couleurs distinctes est de n^2.
Puisque chaque combinaison de deux boules parmi les $2n$ est équiprobable, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}} = \frac{n^2}{\frac{(2n)!}{(2n-2)!2!}} = \frac{n^2}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}} = \frac{n}{2n-1}.$$

Commentaires : *Pour cette question est les suivantes, ce n'est pas parce qu'il y a deux couleurs que les probabilités sont égales à* $\frac{1}{2}$.

Probabilités, Algèbre et Analyse

8. Déterminer $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$.

Correction : On a $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$. De plus, si A_1 est réalisé, alors on a ôté une boule noire et une boule blanche de l'urne. Il nous reste donc $n-1$ boules noires et $n-1$ boules blanches.

Dès lors, piocher deux boules de couleurs différentes vaut de même qu'à la question précédente, ainsi :

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{(n-1)^2}{\binom{2(n-1)}{2}} = \frac{n-1}{2(n-1)-1} = \frac{n-1}{2n-3}.$$

On introduit également les évènements :

B_1 : « obtenir deux boules blanches au premier tirage »,
N_1 : « obtenir deux boules noires au premier tirage ».

9. Calculer $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(A_2 \mid B_1)$ et $\mathbb{P}(N_1)$, $\mathbb{P}(A_2 \mid N_1)$.

Correction : On a $\binom{n}{2}$ façons de piocher deux boules blanches au premier tirage parmi les $\binom{2n}{2}$ configurations possibles. On a donc :

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n!}{(n-2)!2!}\frac{(2n-2)!2!}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{2}\frac{2}{(2n)(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

De plus, si B_1 est réalisé, alors il nous reste $n-2$ boules blanches et n boules noires. Alors il y a $\binom{2n-2}{2}$ configurations possibles au deuxième tirage (on note que puisque $n \geqslant 2, 2n-2 \geqslant 0$). Pour construire un tirage avec deux boules de couleurs différentes, on choisit une boule blanche : on a $n-2$ choix, et une boule noire : n choix. D'où :

$$\mathbb{P}(A_2 \mid B_1) = \frac{(n-2)n}{\binom{2n-2}{2}} = \frac{2(n-2)n}{(2n-2)(2n-3)} = \frac{(n-2)n}{(n-1)(2n-3)}.$$

De même, par symétrie des hypothèses sur les couleurs :

$$\mathbb{P}(N_1) = \frac{n-1}{2(2n-1)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_2 \mid N_1) = \frac{(n-2)n}{(n-1)(2n-3)}.$$

10. Calculer $\mathbb{P}(A_2)$.

Correction : On observe que la famille (A_1, B_1, N_1) forme un système complet d'évènements.

Donc, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid N_1)\mathbb{P}(N_1).$$

Donc par les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \frac{n-1}{2n-3}\frac{n}{2n-1} + \frac{(n-2)n}{(n-1)(2n-3)}\frac{n-1}{2(2n-1)} + \frac{(n-2)n}{(n-1)(2n-3)}\frac{n-1}{2(2n-1)} \\ &= \frac{n(n-1+n-2)}{(2n-3)(2n-1)} \\ &= \frac{n}{2n-1}.\end{aligned}$$

11. Les évènements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

Correction : Comme $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$, on sait que A_1 et A_2 sont indépendants si, et seulement si $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \mathbb{P}(A_2)$.

Or, d'après les questions précédentes, $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \dfrac{n-1}{2n-3}$ et $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{n}{2n-1}$.

On ne peut malheureusement pas affirmer que $\dfrac{n-1}{2n-3} \neq \dfrac{n}{2n-1}$ même si cela se « voit ».

Or, pour $n \geqslant 2$, $2n-1 > 2n-3 \neq 0$ ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{2n-3} = \frac{n}{2n-1} &\iff (n-1)(2n-1) = n(2n-3) \\ &\iff 1 = 0.\end{aligned}$$

Équation sans solution donc $\dfrac{n-1}{2n-3} \neq \dfrac{n}{2n-1}$ et les évènements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

Commentaires : *Trop de blablas en général !*

12. Calculer la probabilité d'avoir obtenu deux boules de même couleur au premier tirage sachant que l'on a obtenu deux boules de même couleur au deuxième tirage.

Correction : On cherche $\mathbb{P}(\overline{A_1} \mid \overline{A_2})$. Tout d'abord, on remarque qu'on a $\mathbb{P}(\overline{A_2}) \neq 0$. Puisque $\mathbb{P}_{\overline{A_2}}$ est une probabilité, on commence par noter que :

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \mid \overline{A_2}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \mid \overline{A_2}).$$

Comme $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$, d'après la formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \mid \overline{A_2}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A_2} \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(\overline{A_2})} = \frac{(1-\mathbb{P}(A_2 \mid A_1))\mathbb{P}(A_1)}{1-\mathbb{P}(A_2)}.$$

Donc, par les questions précédentes,

$$\mathbb{P}(A_1 \mid \overline{A_2}) = \frac{\left(1 - \dfrac{n-1}{2n-3}\right)\dfrac{n}{2n-1}}{1-\frac{n}{2n-1}} = \frac{(2n-3-n+1)n}{(2n-3)(2n-1-n)} = \frac{(n-2)n}{(2n-3)(n-1)}.$$

Par suite,

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \mid \overline{A_2}) = 1 - \frac{(n-2)n}{(2n-3)(n-1)} = \frac{2n^2-5n+3-n^2+2n}{(2n-3)(n-1)} = \frac{n^2-3n+3}{(2n-3)(n-1)}.$$

La probabilité recherchée est donc : $\dfrac{n^2-3n+3}{(2n-3)(n-1)}$.

Commentaires : *Pour cette question et les suivantes, bravo à tous ceux qui ont trouvé des probabilités supérieures à 1. Je vous envie d'avoir autant de chances !*

Partie 3 : Y'a toujours une partie plus diff... rigolote !

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose : $B_k = \bigcap\limits_{i\in[\![1;k]\!]} A_i$.

13. Montrer que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k \,|\, B_{k-1}) = \dfrac{n-k+1}{2n-2k+1}$.

Correction : Soit $k \in [\![2;n]\!]$. On suppose que B_{k-1} est réalisé *i.e.* à chaque tirage entre 1 et $k-1$, nous avons tiré une boule blanche et une boule noire.

À l'étape k, il nous reste donc $n-k+1$ boules blanches et $n-k+1$ boules noires.

Ainsi, le nombre de tirages possibles à l'étape k est :

$$\binom{2(n-k+1)}{2} = \frac{(2n-2k+2)(2n-2k+1)}{2} = (n-k+1)(2n-2k+1).$$

Pour que A_k soit réalisé, il faut tirer une boule blanche : $n-k+1$ choix et une boule noire : $n-k+1$ choix et donc on a $(n-k+1)^2$ choix pour obtenir A_k.

Ainsi, chaque tirage de couples étant équiprobable, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_k \mid B_{k-1}) = \frac{(n-k+1)^2}{(n-k+1)(2n-2k+1)} = \frac{n-k+1}{2n-2k+1}.$$

14. Exprimer en fonction de $n!$, $(2n)!$ et 2^n les quantités

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Correction : Simples calculs :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!.$$

De plus,

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2n} p = \frac{\prod\limits_{p=1}^{2n} p}{\prod\limits_{\substack{p=1 \\ p \text{ pair}}}^{2n} p} = \frac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Commentaires : *Une question donnée...mais très mal faites.*

15. Montrer que $p_n = \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Correction : D'après (2), on a $p_n = \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.

La formule des probabilités composées s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \times \mathbb{P}(A_{n-1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_1) \\ &= \mathbb{P}(A_n \mid B_{n-1}) \times \mathbb{P}(A_{n-1} \mid B_{n-2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_1). \end{aligned}$$

Avec (13),

$$\begin{aligned} &= \frac{n-n+1}{2n-2n+1} \times \frac{n-(n-1)+1}{2n-2(n-1)+1} \times \cdots \times \frac{n-2+1}{2n-2\times 2+1}\mathbb{P}(A_1) \\ &= 1 \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{2n-3}\frac{n}{2n-1} \qquad \text{(d'après (7).)} \\ &= \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} \\ &= \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} = \frac{n!(2n-n)!}{(2n)!}2^n \\ &= \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}. \end{aligned}$$

16. Sachant que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, en déduire un équivalent simple de p_n quand $n \to +\infty$, puis préciser sa limite.

Correction : Par la question précédente, on a $p_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$.

Or, $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ et donc $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}$.
Ainsi, par quotient,

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{2n}(2\pi n)\,\mathrm{e}^{-2n}2^n}{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}\,\mathrm{e}^{-2n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2^n}.$$

Un équivalent simple de p_n en $+\infty$ est donc $\dfrac{\sqrt{\pi n}}{2^n}$ et par croissances comparées, on a directement

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.$$

Commentaires : *On ne peut pas espérer trier notre urne en faisant de cette manière !*