

Applications linéaires

Nom :

Prénom :

I/ QCM _____

Une seule réponse exacte par question.

I.1 En dimension quelconque _____

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Quelle propriété est toujours vérifiée ?

(a) ☐ $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$	(c) ☐ $\text{Im } u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$
(b) ☐ $\text{Im } u \supset \text{Im } u^2$	(d) ☐ $\text{Im } u + \text{Im } u^2 = E$

2. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E ,

(a) ☐ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$	(c) ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
(b) ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$	(d) ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E , u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F .

(a) ☐ $v \in \mathcal{L}(F)$	(c) ☐ $v \in \mathcal{L}(E, F)$
(b) ☐ $v \in \mathcal{L}(F, E)$	(d) ☐ v n'est pas forcément linéaire

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

(a) ☐ si $\ker u = F$	(c) ☐ si $F \cap \ker u = \{0\}$
(b) ☐ si $F \not\subset \ker u$	(d) ☐ si $F \cap \ker u = \emptyset$

5. Si u est un endomorphisme de E , on a toujours

(a) ☐ $\ker u \subset \ker u^2$	(c) ☐ $\ker u = \ker u^2$
(b) ☐ $\ker u \supset \ker u^2$	(d) ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

6. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

(a) ☐ $\text{Im } u = \text{Im } v$	(c) ☐ $\text{Im } v \subset \ker u$
(b) ☐ $u = \text{Id}$	(d) ☐ $u _{\text{Im } v} = \text{Id}$

I.2 En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

7. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

- (a) ☐ $\dim E$ (c) ☐ $\operatorname{rg} u$
 (b) ☐ $\operatorname{rg} v$ (d) ☐ $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} v^{-1}$

8. Soit u un endomorphisme de E de rang r . Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

- (a) ☐ r^2 (b) ☐ $2r$ (c) ☐ r (d) ☐ $r - 2$

9. Si E est de dimension n , la dimension de $\mathcal{L}(E)$ est

- (a) ☐ n^2 (b) ☐ n (c) ☐ 2^n (d) ☐ $2n$

10. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?

- (a) ☐ $u = v$ (c) ☐ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$
 (b) ☐ $\ker u = \ker v$ (d) ☐ u et v sont surjectives

11. Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement

- (a) ☐ injective (c) ☐ constante
 (b) ☐ surjective (d) ☐ un projecteur

12. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors

- (a) ☐ v est bijectif (c) ☐ $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$
 (b) ☐ v est nul (d) ☐ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

II/ Cours

1. Énoncer le théorème du rang.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(a) L'application f peut-elle être surjective? Justifier.

(b) Donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{ker}(f)$. f est-elle injective ?

(c) A-t-on $\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$?

Applications linéaires

Nom :

Prénom :

I/ QCM _____

Une seule réponse exacte par question.

I.1 En dimension quelconque _____

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Quelle propriété est toujours vérifiée ?

(a) ☐ $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$

(c) ☐ $\text{Im } u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$

(b) ☐ $\text{Im } u \supset \text{Im } u^2$

(d) ☐ $\text{Im } u + \text{Im } u^2 = E$

2. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E ,

(a) ☐ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$

(c) ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$

(b) ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$

(d) ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E , u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F .

(a) ☐ $v \in \mathcal{L}(F)$

(c) ☐ $v \in \mathcal{L}(E, F)$

(b) ☐ $v \in \mathcal{L}(F, E)$

(d) ☐ v n'est pas forcément linéaire

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

(a) ☐ si $\ker u = F$

(c) ☐ si $F \cap \ker u = \{0\}$

(b) ☐ si $F \not\subset \ker u$

(d) ☐ si $F \cap \ker u = \emptyset$

5. Si u est un endomorphisme de E , on a toujours

(a) ☐ $\ker u \subset \ker u^2$

(c) ☐ $\ker u = \ker u^2$

(b) ☐ $\ker u \supset \ker u^2$

(d) ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

6. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

(a) ☐ $\text{Im } u = \text{Im } v$

(c) ☐ $\text{Im } v \subset \ker u$

(b) ☐ $u = \text{Id}$

(d) ☐ $u|_{\text{Im } v} = \text{Id}$

I.2 En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

7. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à
 - (a) ☐ $\dim E$
 - (b) ☐ $\operatorname{rg} v$
 - (c) ☐ $\operatorname{rg} u$
 - (d) ☐ $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} v^{-1}$
8. Soit u un endomorphisme de E de rang r . Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?
 - (a) ☐ r^2
 - (b) ☐ $2r$
 - (c) ☐ r
 - (d) ☐ $r - 2$
9. Si E est de dimension n , la dimension de $\mathcal{L}(E)$ est
 - (a) ☐ n^2
 - (b) ☐ n
 - (c) ☐ 2^n
 - (d) ☐ $2n$
10. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?
 - (a) ☐ $u = v$
 - (b) ☐ $\ker u = \ker v$
 - (c) ☐ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$
 - (d) ☐ u et v sont surjectives
11. Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement
 - (a) ☐ injective
 - (b) ☐ surjective
 - (c) ☐ constante
 - (d) ☐ un projecteur
12. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors
 - (a) ☐ v est bijectif
 - (b) ☐ v est nul
 - (c) ☐ $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$
 - (d) ☐ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

II/ Cours

1. Énoncer le théorème du rang.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
 $(x ; y ; z) \longmapsto (x + 2y + 3z ; 4x - y + z)$

(a) L'application f peut-elle être injective ? Justifier.

.....

.....

.....

(b) Donner une base de $\ker (f)$ et de $\operatorname{Im} (f)$. f est-elle surjective ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker (f) \oplus \operatorname{Im} (f)$?

.....

.....

.....