

Applications linéaires

I/ QCM _____

Une seule réponse exacte par question.

I.1 En dimension quelconque _____

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Quelle propriété est toujours vérifiée ?

(a) ☐ $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$	(c) ☐ $\text{Im } u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$
(b) ☒ $\text{Im } u \supset \text{Im } u^2$	(d) ☐ $\text{Im } u + \text{Im } u^2 = E$

2. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E ,

(a) ☒ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$	(c) ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
(b) ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$	(d) ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E , u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F .

(a) ☐ $v \in \mathcal{L}(F)$	(c) ☐ $v \in \mathcal{L}(E, F)$
(b) ☒ $v \in \mathcal{L}(F, E)$	(d) ☐ v n'est pas forcément linéaire

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

(a) ☐ si $\ker u = F$	(c) ☒ si $F \cap \ker u = \{0\}$
(b) ☐ si $F \not\subset \ker u$	(d) ☐ si $F \cap \ker u = \emptyset$

5. Si u est un endomorphisme de E , on a toujours

(a) ☒ $\ker u \subset \ker u^2$	(c) ☐ $\ker u = \ker u^2$
(b) ☐ $\ker u \supset \ker u^2$	(d) ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

6. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

(a) ☐ $\text{Im } u = \text{Im } v$	(c) ☐ $\text{Im } v \subset \ker u$
(b) ☐ $u = \text{Id}$	(d) ☒ $u _{\text{Im } v} = \text{Id}$

I.2 En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

7. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

- (a) ☐ $\dim E$ (c) ☐ $\operatorname{rg} u$
 (b) ☒ $\operatorname{rg} v$ (d) ☐ $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} v^{-1}$

8. Soit u un endomorphisme de E de rang r . Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

- (a) ☐ r^2 (b) ☐ $2r$ (c) ☒ r (d) ☐ $r - 2$

9. Si E est de dimension n , la dimension de $\mathcal{L}(E)$ est

- (a) ☒ n^2 (b) ☐ n (c) ☐ 2^n (d) ☐ $2n$

10. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?

- (a) ☐ $u = v$ (c) ☒ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$
 (b) ☐ $\ker u = \ker v$ (d) ☐ u et v sont surjectives

11. Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement

- (a) ☐ injective (c) ☐ constante
 (b) ☒ surjective (d) ☐ un projecteur

12. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors

- (a) ☐ v est bijectif (c) ☒ $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$
 (b) ☐ v est nul (d) ☐ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

II/ Cours

1. Énoncer le théorème du rang.

confer cours

2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
 $(x; y) \longmapsto (2x + 3y; -x + 4y; 5x - 2y)$

(a) L'application f peut-elle être surjective ? Justifier.

D'après le théorème du rang, $2 = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f)$ donc $\operatorname{rg}(f) \leq 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$ et f ne peut être surjective.

(b) Donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\ker(f)$. f est-elle injective ?

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

Comme $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{-1}$, les deux vecteurs non nuls sont libres. Ils forment une base de $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 2 ce qui confirme que f n'est pas surjective.

$$(x; y) \in \ker(f) \iff \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -x + 4y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ 11y = 0 \end{cases} \iff (x; y) = (0; 0).$$

Donc $\ker(f) = \{0\}$ et f est injective.

(c) A-t-on $\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$?

$\text{Im}(f)$ n'est pas dans $\mathbb{R}^2$ donc difficile ! Par contre, cela reste vrai avec les dimensions.

Applications linéaires

I/ QCM _____

Une seule réponse exacte par question.

I.1 En dimension quelconque _____

- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Quelle propriété est toujours vérifiée ?

(a) ☐ $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$	(c) ☐ $\text{Im } u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$
(b) ☒ $\text{Im } u \supset \text{Im } u^2$	(d) ☐ $\text{Im } u + \text{Im } u^2 = E$
- Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E ,

(a) ☒ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$	(c) ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
(b) ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$	(d) ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$
- Soit F un sous-espace vectoriel de E , u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F .

(a) ☐ $v \in \mathcal{L}(F)$	(c) ☐ $v \in \mathcal{L}(E, F)$
(b) ☒ $v \in \mathcal{L}(F, E)$	(d) ☐ v n'est pas forcément linéaire
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

(a) ☐ si $\ker u = F$	(c) ☒ si $F \cap \ker u = \{0\}$
(b) ☐ si $F \not\subset \ker u$	(d) ☐ si $F \cap \ker u = \emptyset$
- Si u est un endomorphisme de E , on a toujours

(a) ☒ $\ker u \subset \ker u^2$	(c) ☐ $\ker u = \ker u^2$
(b) ☐ $\ker u \supset \ker u^2$	(d) ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$
- Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

(a) ☐ $\text{Im } u = \text{Im } v$	(c) ☐ $\text{Im } v \subset \ker u$
(b) ☐ $u = \text{Id}$	(d) ☒ $u _{\text{Im } v} = \text{Id}$

I.2 En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

7. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

- (a) ☐ $\dim E$ (c) ☐ $\operatorname{rg} u$
 (b) ☒ $\operatorname{rg} v$ (d) ☐ $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} v^{-1}$

8. Soit u un endomorphisme de E de rang r . Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

- (a) ☐ r^2 (b) ☐ $2r$ (c) ☒ r (d) ☐ $r - 2$

9. Si E est de dimension n , la dimension de $\mathcal{L}(E)$ est

- (a) ☒ n^2 (b) ☐ n (c) ☐ 2^n (d) ☐ $2n$

10. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?

- (a) ☐ $u = v$ (c) ☒ $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$
 (b) ☐ $\ker u = \ker v$ (d) ☐ u et v sont surjectives

11. Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement

- (a) ☐ injective (c) ☐ constante
 (b) ☒ surjective (d) ☐ un projecteur

12. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors

- (a) ☐ v est bijectif (c) ☒ $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$
 (b) ☐ v est nul (d) ☐ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

II/ Cours

1. Énoncer le théorème du rang.

confer cours

2. On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
 $(x; y; z) \longmapsto (x + 2y + 3z; 4x - y + z)$

(a) L'application f peut-elle être injective ? Justifier.

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - \operatorname{rg}(f) \geq 3 - 2 = 1 > 0$ et f ne peut être injective.

(b) Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$. f est-elle surjective ?

$$\begin{aligned} (x; y; z) \in \ker(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 9y + 11z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 5y = 0 \\ 9y + 11z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{11}y \\ y = y \\ z = -\frac{11}{9}y \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} \right)$ qui est donc de dimension 1 ce qui confirme que f n'est pas injective.

D'après le théorème du rang, on sait alors que $\text{rg}(f) = 2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs libres de $\text{Im}(f)$ ce qui est le cas avec $f(1; 0; 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $f(0; 1; 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une base de $\text{Im}(f)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ donc $\text{Im}(f)$, sev de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, est donc $\mathbb{R}^2$ tout entier *i.e.* f est surjective.

(c) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$?

$\text{Im}(f)$ n'est pas dans $\mathbb{R}^3$ donc difficile ! Par contre, cela reste vrai avec les dimensions.