

Applications linéaires

Problème : Dans tout ce problème, E et F désignent deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. De plus, pour tout application linéaire f de $\mathcal{L}(E, F)$, on note :

$$A_f = \{h \in \mathcal{L}(F, E), f \circ h \circ f = 0\}, \quad B_f = \{h \in \mathcal{L}(F, E), \text{Im}(f) \subset \ker(h)\} \\ \text{et } C_f = \{h \in \mathcal{L}(F, E), \text{Im}(h) \subset \ker(f)\}.$$

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie 1

Dans cette partie seulement, on pose $E = F = \mathbb{R}^2$ et

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x - 4y, -3x + 6y) \end{cases} \quad \text{et } g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x - 2y, x - y) \end{cases}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ker(f) = \text{Vect}(u)$.
3. Déterminer $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v)$.
4. Montrer que $g \in A_f$.

Partie 2

On note $T_f : \begin{cases} \mathcal{L}(F, E) & \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ h & \mapsto f \circ h \circ f \end{cases}$.

1. Montrer que T_f est bien définie et linéaire.
2. Montrer que A_f est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
3. (a) Montrer que $B_f \subset A_f$.
(b) Montrer que si f est injective alors $B_f = A_f$.
4. (a) Montrer que $C_f \subset A_f$.
(b) Montrer que si f est surjective alors $C_f = A_f$.
5. Montrer que si f est bijective alors T_f est bijective.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une application linéaire g de $\mathcal{L}(F, E)$ telle que

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

1. Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de F .
2. Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans F .