Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\varphi(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P + (1 - X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que $\mathrm{Vect}(X - 1) \subset \ker \varphi$.

3. Dans cette question, on suppose que P appartient à $\ker \varphi$ et est non nul.

   (a) Montrer que $X - 1$ divise P.

   (b) En considérant le coefficient dominant de $\varphi(P)$, montrer que P est un polynôme de degré 1.

   (c) Déterminer $\ker \varphi$.

4. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note T_k le polynôme $(X - 1)^k$.

   (a) Exprimer $\varphi(T_k)$ en fonction de k et T_k.

   (b) En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que

   $$\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, \dots, n\}\right).$$

5. Montrer que $\ker \varphi$ et $\mathrm{Im}\ \varphi$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$.