

Applications linéaires

Partie 1

1. Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$.

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (2(\alpha x + \beta x') - 4(\alpha y + \beta y'), -3(\alpha x + \beta x') + 6(\alpha y + \beta y')) \\ &= (\alpha(2x - 4y) + \beta(2x' - 4y'), \alpha(-3x + 6y) + \beta(-3x' + 6y')) \\ &= \alpha(2x - 4y, -3x + 6y) + \beta(2x' - 4y', -3x' + 6y') \\ &= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y') = \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(\alpha u + \beta v) &= g(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (2(\alpha x + \beta x') - 2(\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y')) \\ &= (\alpha(2x - 2y) + \beta(2x' - 2y'), \alpha(x - y) + \beta(x' - y')) \\ &= \alpha(2x - 2y, x - y) + \beta(2x' - 2y', x' - y') \\ &= \alpha g(x, y) + \beta g(x', y') = \alpha g(u) + \beta g(v). \end{aligned}$$

Les fonctions f et g sont donc linéaires.

2. Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} w \in \ker(f) &\iff f(w) = 0 \iff (2x - 4y, -3x + 6y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases} \iff x = 2y \\ &\iff w = (2y, y) = y(2, 1) \iff w \in \text{Vect}((2, 1)). \end{aligned}$$

En posant $u = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$, on obtient $\ker(f) = \text{Vect}(u)$.

3. On remarque d'ores et déjà que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = (2(x - 2y), -3(x - 2y)) = (x - 2y) \cdot (2, -3)$$

donc, en posant $v = (2, -3)$, on a $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(v)$.

Soit $w \in \text{Vect}(v)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = (2\lambda, -3\lambda)$. On peut écrire

$$w = (2\lambda, -3\lambda) = f(\lambda, 0) \quad \text{donc} \quad w \in \text{Im}(f).$$

Ainsi $\text{Vect}(v) \subset \text{Im}(f)$ et par double inclusion, on obtient $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v)$.

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f \circ g \circ f(x, y) &= f \circ g(f(x, y)) = f \circ g(2x - 4y, -3x + 6y) = f(g(2x - 4y, -3x + 6y)) \\ &= f(2(2x - 4y) - 2(-3x + 6y), (2x - 4y) - (-3x + 6y)) = f(10x - 20y, 5x - 10y) \\ &= (2(10x - 20y) - 4(5x - 10y), -3(10x - 20y) + 6(5x - 10y)) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

donc $f \circ g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$, ie g appartient à A_f .

Partie 2

1. Soient $(h_1, h_2) \in \mathcal{L}(F, E)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f étant linéaire, on a

$$\begin{aligned} T_f(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) &= f \circ (\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) \circ f = f \circ (\lambda_1 \cdot h_1 \circ f + \lambda_2 \cdot h_2 \circ f) \\ &= \lambda_1 \cdot f \circ h_1 \circ f + \lambda_2 \cdot f \circ h_2 \circ f \\ &= \lambda_1 \cdot T_f(h_1) + \lambda_2 \cdot T_f(h_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application T_f est une application linéaire.

2. On a $A_f = \ker(T_f)$ donc A_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$ en tant que noyau d'une application linéaire.
3. (a) Soit $h \in B_f$ donc $\text{Im}(f) \subset \ker(h)$. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in \text{Im}(f) \subset \ker(h)$ donc

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = 0 \text{ puis } f \circ h \circ f(x) = f(h \circ f(x)) = f(0) = 0.$$

Par conséquent, l'application $f \circ h \circ f$ est la fonction nulle, ie $f \circ h \circ f = 0$. Il s'ensuit $h \in A_f$ de quoi l'on déduit $B_f \subset A_f$.

- (b) On a déjà montré lors de la question précédente $B_f \subset A_f$. On montre maintenant l'inclusion $A_f \subset B_f$ sous l'hypothèse f injective, ie $\ker(f) = \{0\}$.

Soit $h \in A_f$. Montrons que $\text{Im}(f) \subset \ker(h)$. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Dès lors,

$$f(h(y)) = f(h(f(x))) = f \circ h \circ f(x) = 0 \text{ car } h \in A_f.$$

On obtient $h(y) \in \ker(f)$. La fonction f étant injective, on a $\ker(f) = \{0\}$ donc $h(y) = 0$, ie $y \in \ker(h)$. Il s'ensuit $\text{Im}(f) \subset \ker(h)$, autrement dit $h \in B_f$.

Par double inclusion, si f est injective, on a $A_f = B_f$.

4. (a) Soit $h \in C_f$, ie $\text{Im}(h) \subset \ker(f)$. Pour tout $y \in F$, on a $h(y) \in \text{Im}(h) \subset \ker(f)$, donc $f \circ h(y) = f(h(y)) = 0$. Dès lors, pour tout $x \in E$, on a

$$f \circ h \circ f(x) = f \circ h(\underbrace{f(x)}_{\in F}) = 0.$$

Par conséquent, l'application $f \circ h \circ f$ est la fonction nulle, ie $f \circ h \circ f = 0$. Il s'ensuit $h \in A_f$ de quoi l'on déduit $C_f \subset A_f$.

- (b) On a déjà montré lors de la question précédente $C_f \subset A_f$. On montre maintenant l'inclusion $A_f \subset C_f$ sous l'hypothèse f surjective.

Soit $h \in A_f$. Montrons que $\text{Im}(h) \subset \ker(f)$. Soit $x \in \text{Im}(h)$. Il existe $y \in F$ tel que $x = h(y)$. On a $y \in F$ et f surjective donc il existe $x' \in E$ tel que $y = f(x')$. Dès lors,

$$f(x) = f(h(y)) = f(h(f(x'))) = f \circ h \circ f(x') = 0 \text{ car } h \in A_f.$$

On obtient ainsi $x \in \ker(f)$. Il s'ensuit $\text{Im}(h) \subset \ker(f)$, autrement dit $h \in C_f$.

Par double inclusion, si f est surjective, on a $A_f = C_f$.

5. Si f est bijective alors il existe $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$. On définit alors

$$T_{f^{-1}} : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{L}(F, E) \\ h & \mapsto f^{-1} \circ h \circ f^{-1} \end{cases}.$$

Dès lors, on a $T_f \circ T_{f^{-1}} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ et pour tout $h \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\begin{aligned} T_f \circ T_{f^{-1}}(h) &= T_f(f^{-1} \circ h \circ f^{-1}) = f \circ (f^{-1} \circ h \circ f^{-1}) \circ f = (f \circ f^{-1}) \circ h \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= \text{Id}_F \circ h \circ \text{Id}_E = h \end{aligned}$$

donc $T_f \circ T_{f^{-1}} = \text{Id}_{\mathcal{L}(E, F)}$. De même, pour tout $h \in \mathcal{L}(F, E)$, on a

$$\begin{aligned} T_{f^{-1}} \circ T_f(h) &= T_{f^{-1}}(f \circ h \circ f) = f^{-1} \circ (f \circ h \circ f) \circ f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ h \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= \text{Id}_E \circ h \circ \text{Id}_F = h \end{aligned}$$

donc $T_{f^{-1}} \circ T_f = \text{Id}_{\mathcal{L}(F, E)}$. Par conséquent, T_f est une application bijective.

Partie 3

1. Le noyau et l'image d'une application linéaire étant des espaces vectoriels, on déduit que $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de F .

Méthode 1 :

- On montre $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

Soit $y \in \text{Im}(f) \cap \ker(g)$. On a $y \in \text{Im}(f)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, on a $y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0$. Alors

$$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f \circ g(f(x)) = f \circ g(y) = f(g(y)) = f(0) = 0.$$

Ainsi, on obtient $\text{Im}(f) \cap \ker(g) \subset \{0\}$. L'inclusion $\{0\} \subset \text{Im}(f) \cap \ker(g)$ étant toujours vraie, il vient par double inclusion $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

- On montre $\text{Im}(f) + \ker(g) = F$. Soit $y \in F$.

Analyse : Supposons qu'il existe $b \in \text{Im}(f)$ et $b' \in \ker(g)$ tel que $y = b + b'$. On a $b \in \text{Im}(f)$ donc il existe $a \in E$ tel que $b = f(a)$. Dès lors,

$$b = f(a) = f \circ g \circ f(a) = f(g(y - b')) = f(g(y)) - f(g(b')) = f(g(y)) - 0 = f \circ g(y) \quad \text{car } b' \in \ker(g)$$

puis $b' = y - b = y - f \circ g(y)$.

Synthèse : On pose $b = f \circ g(y)$ et $b' = y - f \circ g(y)$. Se faisant :

- on a $b + b' = f \circ g(y) + y - f \circ g(y) = y$,
- on a $b = f \circ g(y) = f(g(y)) \in \text{Im}(f)$,
- on a $g(b') = g(y - f \circ g(y)) = g(y) - g \circ f \circ g(y) = g(y) - g(y) = 0$ donc $b' \in \ker(g)$.

Par conséquent, on a $y \in \text{Im}(f) + \ker(g)$ puis $F \subset \text{Im}(f) + \ker(g)$. Par ailleurs, $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ étant des sous-espaces vectoriels de F , on a également $\text{Im}(f) + \ker(g) \subset F$. Par double inclusion, il vient $\text{Im}(f) + \ker(g) = F$.

- On a ainsi $\text{Im}(f) + \ker(g) = F$ et $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ donc $\text{Im}(f) \oplus \ker(g) = F$. Autrement dit, $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans F .

Méthode 2 :

- L'application $f \circ g : F \rightarrow F$ est linéaire en tant que composée d'applications linéaires et de plus, elle vérifie

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ g.$$

Par conséquent, l'endomorphisme $f \circ g$ est la projection sur $\text{Im}(f \circ g)$ de direction $\ker(f \circ g)$. En particulier, les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(f \circ g)$ et $\ker(f \circ g)$ sont supplémentaires dans F , ie $\text{Im}(f \circ g) \oplus \ker(f \circ g) = F$.

- On montre que $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$. On a toujours $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$. Réciproquement, si $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Sachant que $f = f \circ g \circ f$, il vient

$$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f \circ g(f(x)) \in \text{Im}(f \circ g).$$

Ainsi, on a $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, on obtient $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g)$.

- On montre que $\ker(f \circ g) = \ker(g)$. On a toujours $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(f \circ g)$ ie $f \circ g(x) = 0_F$. Sachant que $g = g \circ f \circ g$, on a

$$g(x) = g \circ f \circ g(x) = g(f \circ g(x)) = g(0_F) = 0_E \quad \text{donc } x \in \ker(g).$$

On a ainsi $\ker(f \circ g) \subset \ker(g)$. Par double inclusion, on obtient $\ker(g) = \ker(f \circ g)$.

- Par conséquent, on a $\text{Im}(f \circ g) \oplus \ker(f \circ g) = F$, $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g)$ et $\ker(g) = \ker(f \circ g)$ donc

$$\text{Im}(f) \oplus \ker(g) = F.$$