Endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg(P) \leqslant n$. On a $\deg(P') \leqslant \deg(P) - 1$ donc
$$\deg((1-X)P') = \deg(1-X) + \deg(P') \leqslant 1 + \deg(P) - 1 \leqslant n.$$
Il s'ensuit
$$\deg(P + (1-X)P') \leqslant \max\{\deg(P), \deg((1-X)P')\} \leqslant n, \quad ie\ P + (1-X)P' \in \mathbb{R}_n[X].$$
(b) Grâce à la question précédente, on sait que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. On montre que φ est linéaire.
Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (1-X)(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q + (1-X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda P + \mu Q + \lambda(1-X)P' + \mu(1-X)Q' \\ &= \lambda(P + (1-X)P') + \mu(Q + (1-X)Q') = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$
Par conséquent, on a $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ linéaire, autrement dit, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathrm{Vect}(X-1)$. Il existe un réel λ tel que $P = \lambda(X-1)$. Dès lors, on a
$$\varphi(P) = P + (1-X)P' = \lambda(X-1) + (1-X)\lambda = 0 \quad \text{donc} \quad P \in \ker\varphi.$$
Par conséquent, on a $\mathrm{Vect}(X-1) \subset \ker\varphi$.

3. (a) On a $P \in \ker\varphi$ donc $\varphi(P) = 0$, autrement dit
$$P + (1-X)P' = 0 \Leftrightarrow P = (X-1)P'.$$
Par conséquent, on a bien $X-1$ qui divise P.
(b) Méthode 1 : On a $P \neq 0$ donc, en notant $p \leqslant n$ le degré de P, il existe $p+1$ réels a_0, a_1,...,a_p avec $a_p \neq 0$ tels que
$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \sum_{k=0}^{p} a_k X^k + (1-X)\sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k + \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} - \sum_{k=0}^{p} k a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k(1-k)X^k + \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)a_{k+1}X^k \\ &= a_p(1-p)X^p + \sum_{k=0}^{p-1}\left[a_k(1-k) + (k+1)a_{k+1}\right]X^k.\end{aligned}$$
Il s'ensuit que le coefficient dominant de $\varphi(P)$ est $a_p(1-p)$. Or, étant donné que $P \in \ker\varphi$, le polynôme $\varphi(P)$ est nul donc en particulier, on a
$$a_p(1-p) = 0 \Leftrightarrow p = 1 \quad \text{car} \quad a_p \neq 0.$$

On a ainsi établi que P est de degré 1.
Méthode 2 : On a $P \in \ker\varphi$ donc $\varphi(P) = 0$ de quoi l'on tire $P = (X-1)P'$. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(P) = \varphi((X-1)P') &= (X-1)P' + (1-X)((X-1)P')' \\ &= (X-1)P' + (1-X)P' - (1-X)^2P'' = -(1-X)^2P''. \end{aligned}$$

On a $(1-X)^2 \neq 0$ donc $P'' = 0$. On en déduit que P' est constant donc $P = (X-1)P'$ est de degré 1 (P non nul donc P' non nul).
Remarque : On vient de prouver $P \in \mathrm{Vect}(X-1)$ donc $\ker\varphi \subset \mathrm{Vect}(X-1)$ que l'on reprouvera dans la question suivante.

(c) On a déjà vu, lors de la question 2, que $\mathrm{Vect}(X-1) \subset \ker\varphi$. On montre désormais que $\ker\varphi \subset \mathrm{Vect}(X-1)$. Soit $P \in \ker\varphi$.
D'après la question 3*a*, on sait que $X-1$ divise P donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)Q$.
D'après la question 3*b*, on sait que $\deg(P) = 1$ donc $\deg(Q) = 0$, autrement dit, $Q \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit $P \in \mathrm{Vect}(X-1)$.
Par double inclusion, on obtient $\ker\varphi = \mathrm{Vect}(X-1)$.

4. Pour tout entier , on note T_k le polynôme $(X-1)^k$.

(a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a

$$\varphi(T_k) = T_k + (1-X)T_k' = (X-1)^k + k(1-X)(X-1)^{k-1} = (1-k)(X-1)^k = (1-k)T_k.$$

On retrouve le fait que $\varphi(T_1) = 0$, ie $\mathrm{Vect}(X-1) \subset \ker\varphi$.

(b) • On montre que $\mathrm{Im}\ \varphi \subset \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, \ldots, n\}\right)$.
Soit $Q \in \mathrm{Im}\ \varphi$. Il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \varphi(P)$. Grâce à la formule de Taylor, on peut écrire

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}T_k.$$

Par linéarité de φ, on peut écrire

$$\begin{aligned} Q = \varphi(P) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}T_k\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\varphi(T_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(1-k)T_k \quad \text{grâce à la question 4a,} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} \frac{(1-k)P^{(k)}(1)}{k!}T_k \quad \text{car } T_1 \in \ker\varphi. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $Q \in \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, \ldots, n\}\right)$.
• On montre $\mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, \ldots, n\}\right) \subset \mathrm{Im}\ \varphi$.
Soit $Q \in \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, \ldots, n\}\right)$. Il existe $(a_0, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Q = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} a_k T_k.$$

Pour $k \neq 1$, grâce à la question 4*a*, on peut réécrire $T_k = \dfrac{1}{1-k}\varphi(T_k) = \varphi\left(\dfrac{1}{1-k}T_k\right)$. Il s'ensuit

$$Q = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} a_k T_k = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} a_k \varphi\left(\frac{1}{1-k}T_k\right) = \varphi\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} \frac{a_k}{k-1}T_k\right) \in \mathrm{Im}\ \varphi.$$

• Par double inclusion, on a bien $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Vect}\left(T_k, k \in \{0, 2, \ldots, n\}\right)$.

5. • On a $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\ \varphi$ qui sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ en tant que noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
• On montre que $\mathbb{R}_n[X] = \ker(\varphi) + \mathrm{Im}\ \varphi$ par double inclusion.
On a $\ker\varphi \subset \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathrm{Im}\ \varphi \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $\ker(\varphi) + \mathrm{Im}\ \varphi \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Grâce à la formule de Taylor, on peut réécrire

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}T_k = \underbrace{P'(1)(X-1)}_{\in \mathrm{Vect}(X-1)} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}T_k}_{\in \mathrm{Vect}(T_k, k\in\{0,2,\dots,n\})}.$$

Étant données les expressions de $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}\ \varphi$ obtenues lors des questions 3c et 4b, on a alors $P \in \ker(\varphi) + \mathrm{Im}\ \varphi$. Par conséquent, on a $\mathbb{R}_n[X] \subset \ker(\varphi) + \mathrm{Im}\ \varphi$.
• On montre que $\ker\varphi \cap \mathrm{Im}\ \varphi = \{0\}$ par double inclusion.
On a toujours $0 \in \ker\varphi$ et $0 \in \mathrm{Im}\ \varphi$ donc $\{0\} \subset \ker\varphi \cap \mathrm{Im}\ \varphi$.
Soit $P \in \ker\varphi \cap \mathrm{Im}\ \varphi$. On a $P \in \ker\varphi = \mathrm{Vect}(X-1)$ donc il existe un réel λ tel que $P = \lambda(X-1)$. De plus, on a $P \in \mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Vect}(T_k, k \in \{0,2,\dots,n\})$ donc il existe n réels a_0, a_2,...,a_n tels que $P = a_0 + \sum_{k=2}^{n} a_k(X-1)^k$. On a ainsi

$$\lambda(X-1) = a_0 + \sum_{k=2}^{n} a_k(X-1)^k.$$

En considérant les polynômes dérivés, il vient $\lambda = \sum_{k=2}^{n} k a_k (X-1)^{k-1}$. En spécifiant cette relation en $X = 1$, il vient $\lambda = 0$ donc $P = \lambda(X-1) = 0$.
On a ainsi établi $\ker\varphi \cap \mathrm{Im}\ \varphi \subset \{0\}$.
• Par conséquent, on a $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\ \varphi$ qui sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$, ce que l'on note $\mathbb{R}_n[X] = \ker\varphi \oplus \mathrm{Im}\ \varphi$.