

Intégration et Applications linéaires

1. Intégration

- Définition d'une subdivision et d'une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.
- Théorème d'approximation de Weierstrass si f est continue sur $[a; b]$ alors on peut l'approcher à ε près par une fonction φ en escalier.
- Propriétés : linéarité, positivité/croissance, séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive), relation de Chasles.
- Inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
- Théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale de a à x de f est l'unique primitive de f ... Cas de l'intégrale de f' lorsque f est $\mathcal{C}^1$.
- Sommes de Riemann et convergence des sommes.
- Inégalité de Taylor-Lagrange.

2. Applications linéaires

- Définition par l'image d'une combinaison linéaire de deux vecteurs. Extension aux combinaisons de n vecteurs, cas particulier de la somme et de la multiplication externe.
- Définition de l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, vocabulaire : endomorphisme, forme linéaire, automorphisme, isomorphisme.
- Image de 0, restriction à un sous-espace vectoriel, somme et composition d'applications linéaires, notation f^n .
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. La composition d'applications linéaires est une application linéaire. L'inverse d'une application linéaire est une application linéaire. Cas d'endomorphismes commutant (formule de Leibniz et de Bernoulli).
- Noyau et Image. Définition. Ce sont des sous-espaces vectoriels. Généralisation l'image directe et l'image réciproque de sous-espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels.
- Projecteur et symétrie. Définition et caractérisation par $p^2 = p$ et $s^2 = \text{Id}_E$. Détermination des espaces caractéristiques.
- Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image.
- Image d'un sous-espace engendré et écriture de $\text{Im}(f)$ à l'aide d'une famille génératrice de E .
- L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre et l'image d'une famille génératrice par une application surjective est génératrice.
- Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijektivité d'une application linéaire à l'aide de l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Lorsque f est injective/surjective/bijective comparaison des dimensions de E et F .
- Tous les espaces isomorphes sont de même dimension et tous les espaces de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$.
- Définition du rang. Théorème du rang. Lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.
- Ensemble des solutions d'une équation $f(x) = b$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

Questions de cours possibles ^[1] :

1. (★) Pour les meilleurs et les volontaires encouragés, la construction de l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues sur un segment.
2. (★) Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann et le démontrer dans le cas d'une application lipschitzienne.
3. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
4. $(\mathcal{L}(E; F), +, \cdot)$ est un sev de $(\mathcal{F}(E; F), +, \cdot)$.
5. Équivalence pour une fonction continue à valeurs positives entre nullité de l'intégrale et de la fonction.
6. Théorème fondamental de l'analyse (on admettra la continuité de la primitive envisagée).
7. La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
8. Sur E de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est injective si, et seulement si l'image d'une base de E est une famille libre de F .
9. Entre deux espaces de même dimension finie, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.
10. (★) L'application $\phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$ est un isomorphisme si, et seulement si $(e_1, \dots, e_p)$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$$
est une base de E .
11. (★) Une application linéaire définie sur un espace de dimension finie est uniquement déterminée par l'image d'une base.
12. $\forall f \in \mathcal{L}(E; F), \operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim(E); \dim(F))$ et cas d'égalité.
13. Théorème du rang
14. (★) Caractérisation des endomorphismes idem-potents ou involutifs (on ne demandera qu'un seul des deux cas).

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.