

Séries

Exercice 1 :

- Décomposer la fraction rationnelle $\frac{3x+2}{x(x^2-1)}$ en éléments simples.
- En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

Exercice 2 : Prouver la convergence de chacune des séries suivantes, et en déterminer la somme.

On utilisera une des méthodes de l'exercice précédent.

- $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$
- $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n - 1}{n!}$
- $\sum_{n \geq 0} (n^2 + n + 1) e^{-n}$

I/ Séries à terme positif _____

Exercice 3 : Déterminer la nature des séries de terme général :

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$
- $n^{-(1+\frac{1}{n})}$
- $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$
- $e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$
- $\operatorname{ch}^\alpha(n) - \operatorname{sh}^\alpha(n)$.
- $2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1)$.
- $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
- $\arccos \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} \right)$.
- $\frac{a^n}{1 + a^{2n}}$.
- $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+2)!}$.
- $\frac{n!}{n^n}$
- $\ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$
- $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$
- $\left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$
- $\frac{n^2}{(n-1)!}$
- $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$
- $\frac{1}{\ln(n) \ln(\operatorname{ch} n)}$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$
- $\frac{1}{n^\alpha} S(n)$ où $S(n) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$.

Exercice 4 (Constante d'Euler) : On considère $\forall n \geq 1$, $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Sa limite est notée γ et appelée **constante d'Euler**.

2. En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 5 : Établir la convergence de la suite définie par

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 6 (Cas limite du critère de D'Alembert) : Soit, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}.$$

1. Quelle est la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$?
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Exercice 7 : Étudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$.

Exercice 8 : Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

$$1. \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

$$2. \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$3. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

Exercice 9 : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}$.

1. En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
2. En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II/ Semi-convergence

(un peu HP)

Exercice 10 : On pose $\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 11 : Comparer la convergence des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln(n)}.$$

Exercice 12 (Semi-convergence) : Nature des séries de terme général :

1. $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$
2. $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$
3. $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$
4. $(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls

Exercice 13 (En vrac) : Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 \ln^3(n)}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n)}{n^2}$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
5. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
6. $\sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
7. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$
8. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$
9. $\sum_{n \geq 1} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{e}}$
10. $\sum_{n \geq 2} (\ln(n))^{-\ln(n)}$
11. $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1) \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$
12. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{e^n}$

Exercice 14 : Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.