

Séries

Exercice 1 :

1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{3x+2}{x(x^2-1)}$ en éléments simples.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

Exercice 2 : Prouver la convergence de chacune des séries suivantes, et en déterminer la somme.

On utilisera une des méthodes de l'exercice précédent.

1. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$
2. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n - 1}{n!}$
4. $\sum_{n \geq 0} (n^2 + n + 1) e^{-n}$

I/ Séries à terme positif _____

Exercice 3 : Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$
2. $n^{-(1+\frac{1}{n})}$
3. $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$
4. $e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$
5. $\operatorname{ch}^\alpha(n) - \operatorname{sh}^\alpha(n)$.
6. $2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1)$.
7. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
8. $\arccos \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} \right)$.
9. $\frac{a^n}{1 + a^{2n}}$.
10. $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+2)!}$.
11. $\frac{n!}{n^n}$
12. $\ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$
13. $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$
14. $\left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$
15. $\frac{n^2}{(n-1)!}$
16. $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$
17. $\frac{1}{\ln(n) \ln(\operatorname{ch} n)}$
18. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$
19. $\frac{1}{n^\alpha} S(n)$ où $S(n) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$.

Correction :

1. Montrons que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{n}$.

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

De là on tire que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$.

Par équivalence, la série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente.

2. Montrons que $n^{-(1+\frac{1}{n})} \sim n^{-1}$.

On a $\frac{n^{-(1+\frac{1}{n})}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$ et l'équivalence.

La série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente car la série harmonique est divergente.

3. On sait que : $\ln(e^n - 1) \leq \ln e^n = n$.

De plus, $\ln n \geq 1$ pour n assez grand, par conséquent $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} \geq \frac{1}{n}$.

On conclut par comparaison des termes généraux de signe positif que la série $\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ est divergente.

4. $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$ et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e \left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général $\frac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

5. $\sim \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}} (e^{\alpha-2})^n \Rightarrow$ CV ssi $\alpha < 2$.

8. $\sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} \Rightarrow$ CV.

6. $\sim -\frac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.

9. CV si, et seulement si $|a| \neq 1$.

10. $\leq \frac{(n-1)(n-1)! + n!}{(n+2)!} \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$

7. $\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.

Donc CV.

11. Pour $n \geq 4$, $\frac{n!}{n^n} = \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \underbrace{\frac{4}{n} \times \dots \times \frac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{6}{n^2}.$

Or, $\sum \frac{6}{n^2}$ est convergente.

Donc $\sum \frac{n!}{n^n}$ est aussi convergente par comparaison.

12. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$. $\forall n \geq 1$, u_n existe

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \left(\frac{1}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = O \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, converge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

13. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$. $\forall n \geq 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geq 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

14. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$. Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln(n) \ln \left(\frac{n+3}{2n+1} \right) = \ln(n) \left(\ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \left(-\ln 2 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln 2 \ln(n) + o(1). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\ln 2 \ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geq 1$, diverge (série de RIEMANN d'exposant $\alpha \leq 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

15. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$.

De plus,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

16. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \times n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} = 0$ donc $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o \left(\frac{1}{n^2} \right) \dots$

17. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{\ln(n) \ln(\text{ch } n)}$. Pour tout $n \geq 2$, u_n existe.

$$\text{De plus, } \ln(\text{ch } n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left(\frac{e^n}{2} \right) = n - \ln 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \text{ et } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln(n)} > 0.$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$, diverge.

Donc u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente.

La série de terme général u_n diverge.

18. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$.

Pour $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif.

De plus, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2 + 0} dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n aussi.

19. Pour $n \geq 2$, posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha} S(n)$. Pour $n \geq 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2} S(n)$$

et donc $\forall n \geq 2, S(n) \leq \frac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour tout réel α , la série de terme général u_n converge.

Exercice 4 (Constante d'Euler) : On considère $\forall n \geq 1, u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Sa limite est notée γ et appelée **constante d'Euler**.

2. En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Correction :

$$\begin{aligned} 1. u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est donc convergente. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de la même nature, elle converge également.

2. On vient de montrer que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 5 : Établir la convergence de la suite définie par

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n}.$$

Correction : Étudions la nature de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.

On a :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 - \frac{2}{2 - \frac{1}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \right)} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 - 1 + \frac{1}{4(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4(n+1)\sqrt{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

terme général de signe positif d'une série de Riemann convergente $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$.

D'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme v_n est convergente.

Étant de même nature que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cette dernière converge également.

Exercice 6 (Cas limite du critère de D'Alembert) : Soit, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}.$$

1. Quelle est la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$?
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Correction :

1. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2}$. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 1.
2. En outre, $\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{2n+1}{2n} \geq 1$.

Par conséquent, la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, on a :

$$nu_n \geq u_1 \implies u_n \geq \frac{u_1}{n}.$$

La série de terme général positif u_n est donc divergente (minorée par une série divergente).

Exercice 7 : Étudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$.

Exercice 8 : Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

1. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
2. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
3. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.

Correction :

1. $\frac{1}{n}$.
2. $2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$.
3. $\ln(\ln n)$.

Exercice 9 : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}$.

1. En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
2. En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

es

Correction :

1. Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a , b et c tels que, pour entier naturel non nul k ,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \quad (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1) + bk(2k+1) + ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2 + (3a+b+c)k + a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases},$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}^*, \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right).$$

Ensuite, comme, quand n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1 = -1 + \ln(n+1) + \gamma + o(1) = \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma - 1 + o(1) = \ln n + \gamma - 1 + o(1).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} &= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = -1 + H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n \\ &= \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - 1 + o(1) = \ln 2 + \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = 6 \left(\ln n + \gamma + \ln n + \gamma - 1 - 4 \left(\frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1 \right) \right) = 6(3 - 4\ln 2) + o(1).$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = 6(3 - 4\ln 2).$$

2. $\frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = \frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} \Rightarrow S_n = 18 - 24 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{6}{n+1} \rightarrow 18 - 24\ln 2$
lorsque $n \rightarrow \infty$.

II/ Semi-convergence

(un peu HP)

Exercice 10 : On pose $\forall n \geq 2, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Correction : Dans le cas proposé ici, on ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées puisqu'on vérifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ n'est pas décroissante.

On a recours ici à un développement limité pour établir la nature de la série :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{v_n}. \end{aligned}$$

Étudions chacun des termes de ce développement limité :

- ◇ $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme d'une série alternée convergente.
- ◇ $\frac{1}{n}$ est le terme d'une série divergente.
- ◇ $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est le terme d'une série (absolument) convergente.
- ◇ $v_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est le terme d'une série convergente d'après les critères de comparaison.

Par somme de séries convergentes avec une série divergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ terme général d'une série alternée convergente sans que $\sum u_n$ le soit. C'est un bon contre-exemple de séries dont les termes généraux sont équivalents mais pas de signe constant.

Exercice 11 : Comparer la convergence des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln(n)}.$$

Correction : Rapidement,

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge d'après le critère des séries alternées.
- $\sum_{n \geq 2} v_n$ diverge comme somme d'une série convergente et de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ divergente.

Exercice 12 (Semi-convergence) : Nature des séries de terme général :

1. $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$
2. $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$
3. $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$
4. $(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls

Correction :

1. Pour $n \in \mathbb{N}_{n_0}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2 - 1 + 1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + (n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}_{n_0}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2. Pour $x \in]0, +\infty[$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > e$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x} < 0$.

Donc, la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 3}$ est une suite décroissante. Mais alors la série de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

3. ■ Si $\deg P \geq \deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.
- Si $\deg P \leq \deg Q - 2$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.
- Si $\deg P = \deg Q - 1$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^n \frac{\text{dom}P}{n \text{ dom}Q} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.

En résumé, la série de terme général u_n converge si, et seulement si $\deg P < \deg Q$.

Exercice 13 (En vrac) : Déterminer la nature des séries suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$$

$$5. \sum_{n \geq 1} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

$$9. \sum_{n \geq 1} \cos^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$2. \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 \ln^3(n)}$$

$$6. \sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

$$10. \sum_{n \geq 2} (\ln(n))^{-\ln(n)}$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n)}{n^2}$$

$$7. \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$$

$$11. \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1) \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$$

$$4. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$8. \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{1}{n} \right) - \tan \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$12. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{e^n}$$

Exercice 14 : Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$.

Correction :

ATTENTION

Comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas de signe constant, on ne peut utiliser les critères de comparaison des séries à terme du même nom.

On va devoir « pousser » un petit peu plus loin i.e. le développement limité de u_n donne :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2n+1} + v_n, \text{ où } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}.$$

Maintenant, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par application du critère spécial des séries alternées, et la série $\sum v_n$, à terme général de signe constant, converge elle aussi (série de Riemann).

La série $\sum u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.