

Zéta(2m)

On se propose dans ce devoir de trouver la valeur de $\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$.

I. Polynômes de Bernoulli

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Montrer l'existence et l'unicité d'une application $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], & F'(x) = f(x) \\ \int_0^1 F(t) dt = 0. \end{cases}$$

Correction : Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une application continue.

f admet donc sur l'intervalle $[0, 1]$ une infinité de primitives, toutes de la forme $F_0 + k$ où F_0 est l'une d'entre elles, et $k \in \mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, et posons $F = F_0 + k$.

— F est une primitive de f continue, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

$$\text{— } \int_0^1 F(t) dt = 0 \iff \int_0^1 (F_0(t) + k) dt = 0 \iff \int_0^1 F_0(t) dt + k = 0 \iff k = - \int_0^1 F_0(t) dt.$$

On en déduit qu'il existe une et une seule application $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], & F'(x) = f(x) \\ \int_0^1 F(t) dt = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de l'application $F : x \mapsto F_0(x) - \int_0^1 F_0(t) dt$.

2. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que $B_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \forall x \in [0, 1], & B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \\ \int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0. \end{cases}$$

Calculer B_n pour $n \in [0, 6]$. Les B_n sont appelés polynômes de Bernoulli.

Correction : Montrons par récurrence l'existence et l'unicité d'une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], & B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0 \end{cases}$$

- On pose $B_0 = 1$.
- Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un polynôme B_n .

La fonction polynomiale $(n+1)B_n$ est continue sur $[0, 1]$. D'après la première question, il existe une unique fonction F telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], & F'(x) = (n+1)\tilde{B}_n(x) \\ \int_0^1 \tilde{F}(t) dt = 0 \end{cases}$$

On a vu que la fonction F est une primitive de la fonction polynomiale $(n+1)\tilde{B}_n$. Elle est donc elle-même polynomiale. On peut poser $F = \tilde{B}_{n+1}$, avec B_{n+1} l'unique polynôme associé à cette fonction.

On définit ainsi par récurrence une unique suite de polynômes (*les polynômes de Bernoulli*) vérifiant les conditions données. Les B_n pour $n \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ sont :

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & B_4 &= X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30} \\ B_1 &= X - \frac{1}{2} & B_5 &= X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X \\ B_2 &= X^2 - X + \frac{1}{6} & B_6 &= X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42} \\ B_3 &= X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \end{aligned}$$

3. Préciser le degré et le coefficient dominant de B_n .

Correction : Montrons par récurrence que pour tout n , le polynôme B_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

- $B_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons qu'il existe un entier n tel que $B_n = X^n + \dots$ (les pointillés représentent un polynôme de degré $< n$).

Alors, par construction de la suite $B'_{n+1} = (n+1)B_n = (n+1)X^n + \dots$.

Par intégration, $B'_{n+1} = X^{n+1} + \dots$: la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

- Initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Pour $n \geq 2$, établir la relation $B_n(1) = B_n(0)$.

Correction : Soit $n \geq 2$, on sait par construction que $\int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$ (puisque $n-1 \geq 1$).

$$\text{D'où } \int_0^1 nB_{n-1}(t) dt = 0, \text{ i.e. } \int_0^1 B'_n(t) dt = 0 \text{ i.e. } [B_n(t)]_0^1 = 0, \text{ soit } B_n(1) - B_n(0) = 0$$

$$\forall n \geq 2, \quad B_n(1) = B_n(0).$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $B_n^{(k)}$ en fonction de B_{n-k} .

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence finie sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$.

— Pour $k = 0$, on a bien $\frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k} = \frac{n!}{n!} B_n = B_n = B_n^{(0)}$.

— Supposons que l'on ait pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la formule $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } B_n^{(k+1)} &= (B_n^{(k)})' = \left(\frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k} \right)' = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}' \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) B_{n-k-1} = \frac{n!}{[n-(k+1)]!} B_{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

— Vraie pour $k = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}.$$

(c) Avec la formule de Taylor, établir pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(0) = 0$.

Correction : Soit $n \geq 2$. D'après la formule de Taylor, on a $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

D'après la formule précédente, on a donc $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{\frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(0)}{k!} X^k$.

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(0) X^k. \quad (\text{XXV.1})$$

En particulier, $B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(0)$.

On peut poser $k' = n - k$ dans la somme : $B_n(1) = \sum_{k'=0}^n \binom{n}{n-k'} B_{k'}(0)$.

On renomme k' en k et on utilise la formule de symétrie des coefficients binomiaux.

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(0).$$

D'où $B_n(1) = B_n(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(0)$.

Or, $n \geq 2$ donc on a $B_n(1) = B_n(0)$.

Finalement,

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(0) = 0.$$

Commentaires : La formule (XXV.1) montre que la seule connaissance des nombres de Bernoulli $B_k(0)$ permet de connaître entièrement les polynômes de Bernoulli B_n .

- (d) En déduire la valeur exacte des $B_n(0)$ pour $n \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$. Les $B_n(0)$ sont appelés nombres de Bernoulli.

Correction : D'après la question (2), on a

n	0	1	2	3	4	5	6
$B_n(0)$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$

— Pour avoir $B_7(0)$, on écrit que $\sum_{k=0}^7 \binom{8}{k} B_k(0) = 0$

$$1 \binom{8}{0} - \frac{1}{2} \binom{8}{1} + \frac{1}{6} \binom{8}{2} + 0 \binom{8}{3} - \frac{1}{30} \binom{8}{4} + 0 \binom{8}{5} + \frac{1}{42} \binom{8}{6} + \binom{8}{7} B_7(0) = 0.$$

Et on déduit que $B_7(0) = 0$.

— $\sum_{k=0}^8 \binom{9}{k} B_k(0) = 0$ entraîne $B_8(0) = -\frac{1}{30}$.

— $\sum_{k=0}^9 \binom{10}{k} B_k(0) = 0$ entraîne $B_9(0) = 0$.

— $\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k} B_k(0) = 0$ entraîne $B_{10}(0) = \frac{5}{66}$.

Les premiers nombres de Bernoulli sont donc :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B_n(0)$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Commentaires : On retrouve les nombres de Bernoulli dans les développements limités. En particulier :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^n \frac{B_k(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Et on peut en déduire les développements limités des fonctions tan et th. On démontre que :

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^n |B_{2k}(0)| \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{th}(x) = \sum_{k=0}^n B_{2k}(0) \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + o(x^{2n}).$$

II. Calcul des $\zeta(2m)$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$, montrer que $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$.

Correction : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}
 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) &= 1 + \sum_{k=1}^n (e^{2ik\pi t} + e^{-2ik\pi t}) \\
 &= \sum_{k=-n}^n e^{2ik\pi t} \\
 &= e^{-2in\pi t} \sum_{k=0}^{2n} e^{2ik\pi t} \\
 &= e^{-2in\pi t} \frac{e^{2i(2n+1)\pi t} - 1}{e^{2i\pi t} - 1} \text{ car } e^{2i\pi t} \neq 1 \text{ puisque } t \in]0, 1[\\
 &= e^{-2in\pi t} \frac{e^{i(2n+1)\pi t}}{e^{i\pi t}} \frac{e^{i(2n+1)\pi t} - e^{-i(2n+1)\pi t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}} \\
 &= \frac{2i \sin((2n+1)\pi t)}{2i \sin(\pi t)}
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, 1[, \quad 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

2. Pour $n \geq 2$, on définit l'application $\phi_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}.$$

- (a) Prolonger ϕ_n par continuité sur $[0, 1]$.

Correction : $\forall t \in]0, 1[, \quad \phi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)} = \frac{\frac{B_n(t) - B_n(0)}{t}}{\frac{\sin(\pi t)}{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{B'_n(0)}{\pi}.$

On en déduit que ϕ_n est prolongeable par continuité en 0, en posant $\phi_n(0) = \frac{B'_n(0)}{\pi}$.

De même, en utilisant le fait que $B_n(0) = B_n(1)$ (car $n \geq 2$) :

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \phi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(1)}{\sin(\pi t)} = \frac{\frac{B_n(t) - B_n(1)}{t-1}}{\frac{\sin(\pi t)}{t-1}} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{B'_n(1)}{-\pi}.$$

On en déduit que ϕ_n est prolongeable par continuité en 1, en posant $\phi_n(1) = -\frac{B'_n(1)}{\pi}$.

- (b) Montrer que le prolongement, encore noté ϕ_n , est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

Correction : Tout d'abord, ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

En 0 :

- i. La fonction ϕ_n est continue en 0 ;
- ii. La fonction ϕ_n est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \phi'_n(t) = \frac{B'_n(t) \sin(\pi t) - [B_n(t) - B_n(0)]\pi \cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$$

- iii. La fonction polynomiale B_n étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité d'ordre 2 en 0 donné par :

$$B_n(t) = B_n(0) + B'_n(0)t + \frac{B''_n(0)}{2}t^2 + o(t^2).$$

De même, B'_n est polynomiale. Elle admet développement limité d'ordre 1 en 0 donné par :

$$B'_n(t) = B'_n(0) + B''_n(0)t + o(t).$$

$$\begin{aligned} \phi'_n(t) &= \frac{B'_n(t) \sin(\pi t) - [B_n(t) - B_n(0)]\pi \cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)} \\ &= \frac{[B'_n(0) + B''_n(0)t + o(t)][\pi t + o(t^2)] - \pi[B'_n(0)t + \frac{B''_n(0)}{2}t^2 + o(t^2)][1 + o(t)]}{\pi^2 t^2 + o(t^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\pi B''_n(0)t^2 + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t^2)} = \frac{\frac{1}{2}\pi B''_n(0) + o(1)}{\pi^2 + o(1)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{B''_n(0)}{2\pi} \end{aligned}$$

D'après le théorème prolongement de classe $\mathcal{C}^1$, on peut en déduire que la fonction ϕ_n est dérivable en 0, et que $\phi'_n(0) = \frac{B''_n(0)}{2\pi}$.

On a démontré au passage la continuité de ϕ'_n en 0 (puisque $\phi'_n(t)$ admet une limite en 0).

En 1 :

- i. La fonction ϕ_n est continue en 1 ;
- ii. La fonction ϕ_n est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \phi'_n(t) = \frac{B'_n(t) \sin(\pi t) - [B_n(t) - B_n(0)]\pi \cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$$

- iii. La fonction polynomiale B_n étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité d'ordre 2 en 1 donné par :

$$B_n(1+h) = B_n(1) + B'_n(1)h + \frac{B''_n(1)}{2}h^2 + o(h^2).$$

De même, B'_n est polynomiale. Elle admet développement limité d'ordre 1 en 1 donné par :

$$B'_n(1+h) = B'_n(1) + B''_n(1)h + o(h).$$

$$\begin{aligned}
\phi'_n(1+h) &= \frac{B'_n(1+h) \sin(\pi(1+h)) - [B_n(1+h) - B_n(0)] \pi \cos(\pi(1+h))}{\sin^2(\pi(1+h))} \\
&= \frac{[B'_n(1) + B''_n(1)h + o(h)][-\pi h + o(h^2)] - \pi[B'_n(1)h + \frac{B''_n(1)}{2}h^2 + o(h^2)][-1 + o(h)]}{\pi^2 h^2 + o(h^2)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}\pi B''_n(1)h^2 + o(h^2)}{\pi^2 h^2 + o(h^2)} = \frac{-\frac{1}{2}\pi B''_n(1) + o(1)}{\pi^2 + o(1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{B''_n(1)}{2\pi}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$, on peut en déduire que la fonction ϕ_n est dérivable en 1, et que $\phi'_n(1) = -\frac{B''_n(1)}{2\pi}$.

On a démontré au passage la continuité de ϕ'_n en 1 (puisque $\phi'_n(t)$ admet une limite en 1).

Commentaires : *Personnellement, j'aurais plutôt invoqué un argument de symétrie ou d'anti-symétrie de centre $\frac{1}{2}$ en montrant que $B_n(t) = (-1)^n B_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$ plutôt que de tout refaire.*

Conclusion,

ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \phi_n(t) \sin(\lambda t) dt$.

Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \phi_n(t) \sin(\lambda t) dt \right) = 0$.

Correction : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto \phi_n(t) \sin(\lambda t)$ étant continue sur $[0, 1]$, elle admet une intégrale sur cet intervalle.

Considérons maintenant $\lambda > 0$. Comme les fonctions $t \mapsto \phi_n(t)$ et $t \mapsto -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_n(t) \sin(\lambda t) dt &= \left[-\phi_n(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_0^1 + \int_0^1 \phi'_n(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} dt \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(\phi_n(0) - \phi_n(1) \cos(\lambda) + \int_0^1 \phi'_n(t) \cos(\lambda t) dt \right)
\end{aligned}$$

Montrons que la parenthèse est bornée. Pour cela, remarquons que la fonction ϕ_n est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle est donc bornée. Posons $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |\phi_n(t)| \leq M.$$

Même raisonnement pour ϕ'_n , continue sur le segment $[0, 1]$. Posons $M' \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad |\phi'_n(t)| \leq M'.$$

On a donc, $\forall x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \left| \phi_n(0) - \phi_n(1) \cos(\lambda) + \int_0^1 \phi'_n(t) \cos(\lambda t) dt \right| &\leq |\phi_n(0)| + |\phi_n(1) \cos(\lambda)| + \left| \int_0^1 \phi'_n(t) \cos(\lambda t) dt \right| \\ &\leq M + M |\cos \lambda| + \int_0^1 |\phi'_n(t) \cos(\lambda t)| dt \\ &\leq 2M + \int_0^1 M' dt \\ &\leq 2M + M' \end{aligned}$$

La parenthèse est bien bornée. Et comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \phi_n(t) \sin(\lambda t) dt \right) = 0.$$

Commentaires : Ce théorème, qui s'étend à φ_n simplement continue mais difficile pour vous, porte le nom de théorème de Riemann-Lebesgue.

3. Pour $(m, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $I_{m,k} = \frac{1}{(2m)!} \int_0^1 B_{2m}(t) \cos(2k\pi t) dt$.

(a) Pour $m \geq 2$, trouver une relation entre $I_{m,k}$ et $I_{m-1,k}$.

Correction : Soit $m \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions B_{2m} et $t \mapsto \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} (2m)! I_{m,k} &= \int_0^1 B_{2m}(t) \cos(2k\pi t) dt \\ &= \left[B_{2m}(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 B'_{2m}(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} dt \\ &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B'_{2m}(t) \sin(2k\pi t) dt \quad \text{le crochet étant nul à cause des sinus} \\ &= -\frac{1}{2k\pi} \left(\left[-B'_{2m}(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 B''_{2m}(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} dt \right) \\ &= -\frac{1}{(2k\pi)^2} \left(B'_{2m}(0) - B'_{2m}(1) + \int_0^1 B''_{2m}(t) \cos(2k\pi t) dt \right) \end{aligned}$$

Or,

- $B'_{2m}(0) - B'_{2m}(1) = 2m [B_{2m-1}(0) - B_{2m-1}(1)] = 0$ d'après la question (4a) partie I car $2m - 1 \geq 2$.
- $B''_{2m} = (2m)B'_{2m-1} = (2m)(2m-1)B_{2m-2} = (2m)(2m-1)B_{2(m-1)}$

On en déduit que

$$(2m)! I_{m,k} = -\frac{(2m)(2m-1)}{(2k\pi)^2} \int_0^1 B_{2(m-1)}(t) \cos(2k\pi t) dt.$$

Finalement,

$$I_{m,k} = -\frac{1}{(2k\pi)^2(2m-2)!} \int_0^1 B_{2(m-1)}(t) \cos(2k\pi t) dt.$$

i.e.

$$\forall n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_{m,k} = -\frac{1}{(2k\pi)^2} I_{m-1,k}.$$

(b) Calculer $I_{1,k}$.

Correction : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} I_{1,k} &= \frac{1}{2} \int_0^1 B_2(t) \cos(2k\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[B_2(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 B_2'(t) \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B_1(t) \sin(2k\pi t) dt \text{ le crochet étant nul à cause des sinus} \\ &= -\frac{1}{2k\pi} \left(\left[-B_1(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 B_1'(t) \frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} dt \right) \\ &= -\frac{1}{(2k\pi)^2} \left(B_1(0) - B_1(1) + \int_0^1 B_0(t) \cos(2k\pi t) dt \right) \end{aligned}$$

Cette fois, l'intégrale est nulle car $B_0 = 1$ et $\int_0^1 \cos(2k\pi t) dt = 0$.

Mais $B_1(0) - B_1(1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$. Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_{1,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}.$$

(c) En déduire $I_{m,k}$ pour tout $(m,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Correction : Par récurrence immédiate sur m , à k fixé, on obtient :

$$\forall (m,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad I_{m,k} = \frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}.$$

4. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, exprimer l'intégrale $\int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt$ en fonction de $B_{2m}(0)$ et des $I_{m,k}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Correction : Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt &= \int_0^1 \frac{B_{2m}(t) - B_{2m}(0)}{\sin(\pi t)} \sin((2n+1)\pi t) dt \\
 &= \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0)) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t)\right) dt \text{ d'après II.1} \\
 &= \int_0^1 B_{2m}(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t)\right) dt \\
 &\quad - B_{2m}(0) \int_0^1 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t)\right) dt \\
 &= \underbrace{\int_0^1 B_{2m}(t) dt}_{=0} + 2 \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_0^1 B_{2m}(t) \cos(2k\pi t) dt}_{=(2m)! I_{m,k}} - B_{2m}(0) \\
 &\quad - 2B_{2m}(0) \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_0^1 \cos(2k\pi t) dt}_{=0} \\
 &= -B_{2m}(0) + 2(2m)! \sum_{k=1}^n I_{m,k}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt = -B_{2m}(0) + 2(2m)! \sum_{k=1}^n I_{m,k}.$$

5. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ donnée par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}}$ converge. On note $\zeta(2m)$ sa limite.

Prouver que $\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}}{(2m)!} B_{2m}(0) \pi^{2m}$.

Correction : On fixe $m \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant l'expression de $I_{m,k}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt &= -B_{2m}(0) + 2(2m)! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}} \\
 &= -B_{2m}(0) + \frac{(-1)^{m-1} (2m)!}{2^{2m-1} \pi^{2m}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}}
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m}}{(2m)!} \left(B_{2m}(0) + \int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt \right).$$

Or, on a vu que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin(\lambda t) dt \right) = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt \right) = 0.$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ donnée par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}}$ converge et que sa limite, notée $\zeta(2m)$ vaut :

$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}}{(2m)!} B_{2m}(0) \pi^{2m}.$$

6. Calculer $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\zeta(8)$ et $\zeta(10)$.

Correction : $\zeta(2) = \frac{(-1)^0 2^{2-1} \pi^2}{(2)!} B_2(0) = \frac{\pi^2}{6}$

$$\zeta(4) = \frac{(-1)^1 2^3 \pi^4}{4!} B_4(0) = \frac{-\pi^4}{3} \times \frac{-1}{30} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{(-1)^2 2^5 \pi^6}{6!} B_6(0) = \frac{2\pi^6}{45} \times \frac{1}{42} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \frac{(-1)^3 2^7 \pi^8}{8!} B_8(0) = \frac{-\pi^8}{315} \times \frac{-1}{30} = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$\zeta(10) = \frac{(-1)^4 2^9 \pi^{10}}{10!} B_{10}(0) = \frac{2\pi^{10}}{14175} \times \frac{5}{66} = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

Les premières valeurs des $\zeta(2m)$ sont donc :

$2m$	2	4	6	8	10
$\zeta(2m)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$

Commentaires : Grâce à la relation $\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(0) = 0$, on peut prouver facilement que les nombres de Bernoulli sont tous rationnels. De ce fait, $\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}$ est toujours rationnel.

On ne sait quasiment rien des $\zeta(2m+1)$ pour $m \geq 1$. Roger Apéry a démontré en **1979** que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.