

Endomorphisme remarquable

1. On donne

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) \longmapsto (3x - 2y - 2z; 2x - y - 2z; 2x - 2y - z).$$

Caractériser géométriquement f . (On ne demande pas les espaces caractéristiques)

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et vérifie $f^2 = I_E$ donc c'est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.

Soient $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$.

2. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera la dimension et une base que l'on notera e_1, e_2 et e_3 .

$$(x; y; z) \in F \iff x - y - z = 0 \iff \begin{cases} x = y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \iff (x; y; z) \in \text{vect} \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

In fine, F est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 et de base (e_1, e_2) .

De même,

$$(x; y; z) \in G \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x = y = z \iff (x; y; z) \in \text{vect} \left(e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Conclusion, G est aussi un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 et de base (e_3) .

3. Soit $u(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer u en fonction de e_1, e_2 et e_3 .

Par analyse-synthèse, supposons qu'il existe $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

$$u \in \text{vect}(e_1, e_2, e_3) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \alpha + \gamma = y \\ \beta + \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = x - y \\ \gamma = -x + y + z \end{cases} \quad (\text{XXVI.1})$$

Réciproquement (ou dans la synthèse), on vérifie que l'on a bien :

$$u(x; y; z) = (x - z)e_1 + (x - y)e_2 + (-x + y + z)e_3.$$

4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et préciser une base autre que la base canonique.

Le système (XXVI.1) étant compatible, on a $\mathbb{R}^3 = F + G$.

Étant de Cramer, la décomposition est unique *i.e.* la somme directe donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. En particulier, (e_1, e_2, e_3) en est une base.

5. (a) Rappeler l'expression de la symétrie de base E_1 parallèlement à E_2 lorsque $E = E_1 \oplus E_2$.

Soit $u = x_1 + x_2 \in E$ où $(x_1; x_2) \in E_1 \times E_2$.

Alors $f(u) = x_1 - x_2$.

(b) On considère f dans $\mathbb{R}^3$, la symétrie de base F parallèlement G .

Donner $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

Par définition, $e_1 \in F = \ker(f - I_E)$ donc $f(e_1) = e_1$ de même que $f(e_2) = e_2$.

De même, $e_3 \in G = \ker(f + I_E)$ donc $f(e_3) = -e_3$.

(c) Compléter :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) &\longmapsto (\dots; \dots; \dots). \end{aligned}$$

D'après les questions précédentes, tout $u(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = \underbrace{(x-z)e_1 + (x-y)e_2}_{\in F} + \underbrace{(-x+y+z)e_3}_{\in G}.$$

Donc, par linéarité de f ,

$$\begin{aligned} f(u) &= (x-z)e_1 + (x-y)e_2 - (-x+y+z)e_3. \\ &= (x-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y-2z \\ 2x-y-2z \\ 2x-2y-z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) &\longmapsto (3x-2y-2z; 2x-y-2z; 2x-2y-z). \end{aligned}$$