

Séries

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque.

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle de la série $\sum u_n$.

1. Justifier que, si $k \geq 1$, on a $u_k = S_k - S_{k-1}$, et montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n+1} - S_0.$$

2. En déduire que, si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

3. Trouver un contre-exemple à la réciproque de ce résultat (on cherchera dans les exemples classiques du cours une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, mais $\sum \frac{u_n}{n}$ converge tout de même).

4. Quelques applications :

(a) Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (on ne demande pas la somme).

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier la somme $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$.

(c) En déduire la convergence des séries $\sum \frac{\cos(n)}{n}$ et $\sum \frac{\cos(2n)}{n}$.

(d) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$?

(e) Montrer que $|\cos(k)| \geq \frac{1 + \cos(2k)}{2}$, et déterminer la nature de $\sum \frac{|\cos(n)|}{n}$.