Variables aléatoires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 29

Sommaire I

En théorie des probabilités, une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée après la réalisation d'un phénomène, expérience ou événement, aléatoire : la valeur d'un dé entre 1 et 6, le côté de la pièce dans un pile ou face, le jour de semaine de naissance de la prochaine personne que vous rencontrez, le temps d'attente dans la queue du cinéma, …

Mathématiquement, c'est une application définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Ce furent les jeux de hasard qui amenèrent à concevoir les variables aléatoires, en associant à une éventualité (résultat du lancer d'un ou plusieurs dés, d'un tirage à pile ou face, d'une roulette, etc.) un gain.

Dans tout ce chapitre $(\Omega\,;\mathrm{P})$ représente un espace probabilisé fini et E désigne un ensemble quelconque.

I. Variables aléatoires

1. Définition

Définition 1 :

On appelle variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E toute application $\mathbb{X}$ de Ω dans E.

$$\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}.$$

Si $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle raccourci en v.a.r .

Remarques :

- une *variable* aléatoire est une fonction !

I. Variables aléatoires
1. Définition

Définition 1 :

On appelle variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E toute application $\mathbb{X}$ de Ω dans E.

$$\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}.$$

Si $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle raccourci en v.a.r .

Remarques :

- une *variable* aléatoire est une fonction !
- Comme Ω est fini, une variable aléatoire $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ prend un nombre fini de valeurs.
  L'ensemble de ces valeurs peut s'écrire $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.

Exemple 1 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

L'univers est $\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \cdots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.

On gagne :

- 10 euros si la carte tirée est l'as de cœur ;
- 5 euros si la carte tirée est un autre as ;
- 2 euros si la carte tirée est un valet, une dame ou un roi ;
- -1 euro sinon. On perd donc !

Exemple 1 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

L'univers est $\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \cdots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.

On gagne :

- 10 euros si la carte tirée est l'as de cœur ;
- 5 euros si la carte tirée est un autre as ;
- 2 euros si la carte tirée est un valet, une dame ou un roi ;
- -1 euro sinon. On perd donc !

On peut modéliser le gain par une variable aléatoire

$$\mathbb{X} : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ A\heartsuit & \to & 10 \\ A\diamondsuit & \to & 5 \\ \cdots & \to & \cdots \\ 7\clubsuit & \to & -1 \end{array} \right.$$

Exemple 1 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

L'univers est $\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \cdots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.

On gagne :

- 10 euros si la carte tirée est l'as de cœur ;
- 5 euros si la carte tirée est un autre as ;
- 2 euros si la carte tirée est un valet, une dame ou un roi ;
- -1 euro sinon. On perd donc !

On peut modéliser le gain par une variable aléatoire

$$\mathbb{X} : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ A\heartsuit & \to & 10 \\ A\diamondsuit & \to & 5 \\ \cdots & \to & \cdots \\ 7\clubsuit & \to & -1 \end{array} \right.$$

En particulier, $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$ et $\mathbb{X}^{-1}(5) = \{A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.

Définition 2 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire sur Ω.

- L'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$, image directe de Ω par $\mathbb{X}$, est appelé support de la variable aléatoire.

Définition 2 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire sur Ω.

- L'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$, image directe de Ω par $\mathbb{X}$, est appelé support de la variable aléatoire.
- Soit A une partie de E.

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Définition 2 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire sur Ω.

- L'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$, image directe de Ω par $\mathbb{X}$, est appelé support de la variable aléatoire.
- Soit A une partie de E.
  - L'événement $\mathbb{X}^{-1}(\mathrm{A}) = \{\omega \in \Omega \,/\, \mathbb{X}(\omega) \in \mathrm{A}\}$, image réciproque de A par $\mathbb{X}$, est habituellement et abusivement noté $(\mathbb{X} \in \mathrm{A})$.
    Dans le cas où A est un singleton $\{x\}$ où $x \in \mathrm{E}$, on emploie plutôt les notations $(\mathbb{X} = x)$ au lieu de $(\mathbb{X} \in \{x\})$.

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Définition 2 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire sur Ω.

- L'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$, image directe de Ω par $\mathbb{X}$, est appelé support de la variable aléatoire.
- Soit A une partie de E.
  - L'événement $\mathbb{X}^{-1}(\mathrm{A}) = \{\omega \in \Omega \,/\, \mathbb{X}(\omega) \in \mathrm{A}\}$, image réciproque de A par $\mathbb{X}$, est habituellement et abusivement noté $(\mathbb{X} \in \mathrm{A})$.
    Dans le cas où A est un singleton $\{x\}$ où $x \in \mathrm{E}$, on emploie plutôt les notations $(\mathbb{X} = x)$ au lieu de $(\mathbb{X} \in \{x\})$.
  - La probabilité $\mathrm{P}(\mathbb{X}^{-1}(\mathrm{A}))$ de l'événement $(\mathbb{X} \in \mathrm{A})$ est notée $\mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A})$, celle de $(\mathbb{X} = x)$, $\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$.
    Dans le cas de v.a.r , on note $\mathrm{P}(\mathbb{X} \leqslant x)$ au lieu de $\mathrm{P}(\mathbb{X} \in \,]-\infty\,;x])$.

Exemple 2 :

Dans l' exemple (1) ,

- le support de la variable aléatoire $\mathbb{X}$ est $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$.

Exemple 2 :

Dans l' exemple (1) ,

- le support de la variable aléatoire $\mathbb{X}$ est $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$.
- $(X \leqslant 12)$ est l'événement certain et $(X = 7)$ est l'événement impossible.

Exemple 2 :

Dans l' exemple (1) ,

- le support de la variable aléatoire $\mathbb{X}$ est $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$.
- $(X \leqslant 12)$ est l'événement certain et $(X = 7)$ est l'événement impossible.
- $(X = 5)$ désigne l'événement : $\{A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.
  On peut aussi le lire : « Gagner 5 euros », et on a
  $P(\mathbb{X} = 5) = P(\{A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}) = \dfrac{3}{32}$.

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction $\mathbb{S}$ sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

  $\mathbb{S}$ est une v.a.r sur Ω de support $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$.

  Ainsi, $\mathbb{S}: \begin{array}{ccc} [\![1\,;6]\!]^2 & \longrightarrow & [\![2\,;12]\!] \\ (i\,;j) & \longmapsto & i+j. \end{array}$

  On peut alors remarquer que les événements $(\mathbb{S}=k)_{2\leqslant k\leqslant 12}$ forment un système complet d'événements de Ω.

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction $\mathbb{S}$ sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

  $\mathbb{S}$ est une v.a.r sur Ω de support $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$.

  Ainsi, $\mathbb{S}: \begin{array}{ccc} [\![1\,;6]\!]^2 & \longrightarrow & [\![2\,;12]\!] \\ (i\,;j) & \longmapsto & i+j. \end{array}$

  - $(\mathbb{S}=2) = \{(1\,;1)\}$.

  On peut alors remarquer que les événements $(\mathbb{S}=k)_{2\leqslant k\leqslant 12}$ forment un système complet d'événements de Ω.

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction $\mathbb{S}$ sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

  $\mathbb{S}$ est une v.a.r sur Ω de support $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$.

  Ainsi, $\mathbb{S} : \begin{array}{ccc} [\![1\,;6]\!]^2 & \longrightarrow & [\![2\,;12]\!] \\ (i\,;j) & \longmapsto & i+j. \end{array}$

  - $(\mathbb{S}=2) = \{(1\,;1)\}$.
  - $(\mathbb{S}=3) = \{(1\,;2)\,,(2\,;1)\}$.

  ...

  On peut alors remarquer que les événements $(\mathbb{S}=k)_{2\leqslant k\leqslant 12}$ forment un système complet d'événements de Ω.

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction $\mathbb{S}$ sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.
  $\mathbb{S}$ est une v.a.r sur Ω de support $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$.

  Ainsi, $\mathbb{S}: \begin{array}{ccc} [\![1\,;6]\!]^2 & \longrightarrow & [\![2\,;12]\!] \\ (i\,;j) & \longmapsto & i+j. \end{array}$

  - $(\mathbb{S} = 2) = \{(1\,;1)\}$.
  - $(\mathbb{S} = 3) = \{(1\,;2)\,,(2\,;1)\}$.

    ...
  - $(\mathbb{S} = 7) = \{(1\,;6)\,,(2\,;5)\,,(3\,;4)\,,(4\,;3)\,,(5\,;2)\,,(6\,;1)\}$.

    ...

  On peut alors remarquer que les événements $(\mathbb{S} = k)_{2 \leqslant k \leqslant 12}$ forment un système complet d'événements de Ω.

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction $\mathbb{S}$ sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

  $\mathbb{S}$ est une v.a.r sur Ω de support $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$.

  Ainsi, $\mathbb{S} : \begin{array}{ccc} [\![1\,;6]\!]^2 & \longrightarrow & [\![2\,;12]\!] \\ (i\,;j) & \longmapsto & i+j. \end{array}$

  - $(\mathbb{S}=2) = \{(1\,;1)\}$.
  - $(\mathbb{S}=3) = \{(1\,;2)\,,(2\,;1)\}$.

    ...
  - $(\mathbb{S}=7) = \{(1\,;6)\,,(2\,;5)\,,(3\,;4)\,,(4\,;3)\,,(5\,;2)\,,(6\,;1)\}$.

    ...
  - $(\mathbb{S}=12) = \{(6\,;6)\}$.

  On peut alors remarquer que les événements $(\mathbb{S}=k)_{2\leqslant k\leqslant 12}$ forment un système complet d'événements de Ω.

Théorème 1 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une variable aléatoire de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.

Les événements $(\mathbb{X} = x_1)$, $(\mathbb{X} = x_2)$, ..., $(\mathbb{X} = x_n)$ forment un système complet d'événements de Ω appelé le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$.

Théorème 1 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une variable aléatoire de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.

Les événements $(\mathbb{X} = x_1)$, $(\mathbb{X} = x_2)$, ..., $(\mathbb{X} = x_n)$ forment un système complet d'événements de Ω appelé le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$.

En particulier, si on pose pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, $p_k = \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_k)$ alors :

$$p_k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, définir leur somme $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$, leur produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$, le produit par un scalaire $\lambda\mathbb{X}$ qui sont de nouvelles variables aléatoires.
  Par exemple,

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, définir leur somme $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$, leur produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$, le produit par un scalaire $\lambda\mathbb{X}$ qui sont de nouvelles variables aléatoires.
  Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, définir leur somme $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$, leur produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$, le produit par un scalaire $\lambda\mathbb{X}$ qui sont de nouvelles variables aléatoires.
  Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des variables aléatoires, notée $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \mathbb{X}(\omega) + \mathbb{Y}(\omega).$$

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, définir leur somme $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$, leur produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$, le produit par un scalaire $\lambda\mathbb{X}$ qui sont de nouvelles variables aléatoires.
  Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des variables aléatoires, notée $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \mathbb{X}(\omega) + \mathbb{Y}(\omega).$$

- On appelle produit des variables aléatoires, notée $Z = \mathbb{X}\mathbb{Y}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{Y}(\omega).$$

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, définir leur somme $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$, leur produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$, le produit par un scalaire $\lambda\mathbb{X}$ qui sont de nouvelles variables aléatoires.
  Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des variables aléatoires, notée $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \mathbb{X}(\omega) + \mathbb{Y}(\omega).$$

- On appelle produit des variables aléatoires, notée $Z = \mathbb{X}\mathbb{Y}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{Y}(\omega).$$

- Pour une v.a.r $\mathbb{X}$, on appelle produit par un scalaire, notée $\mathbb{Z} = \lambda\mathbb{X}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \lambda\mathbb{X}(\omega).$$

Exemple 4 :

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus.
  Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant à cette somme.
  Alors, on peut écrire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + ... + \mathbb{X}_5$ où, pour tout $k \in [\![1\,;5]\!]$, $\mathbb{X}_k$ correspond au résultat du dé numéro k.

Exemple 4 :

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus.
  Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant à cette somme.
  Alors, on peut écrire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_5$ où, pour tout $k \in [\![1\,;5]\!]$, $\mathbb{X}_k$ correspond au résultat du dé numéro k.

ATTENTION

$\mathbb{X} \neq 5 \times \mathbb{X}_1$. L'ensemble des valeurs prises par $\mathbb{X}$ est $\{5;\, 6;\, 7;\, 8;\, 9; \ldots;\, 30\}$ (somme possible des 5 dés) alors que $5 \times \mathbb{X}_1$ ne peut prendre que les valeurs 5, 10, 15, 20, 25 et 30.

Exemple 4 :

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus.
  Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant à cette somme.
  Alors, on peut écrire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_5$ où, pour tout $k \in [\![1\,;5]\!]$, $\mathbb{X}_k$ correspond au résultat du dé numéro k.

ATTENTION

$\mathbb{X} \neq 5 \times \mathbb{X}_1$. L'ensemble des valeurs prises par $\mathbb{X}$ est $\{5;\, 6;\, 7;\, 8;\, 9; \ldots ;\, 30\}$ (somme possible des 5 dés) alors que $5 \times \mathbb{X}_1$ ne peut prendre que les valeurs 5, 10, 15, 20, 25 et 30.

- On lance 20 fois une pièce de monnaie et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de pile obtenu.
  On peut écrire la variable aléatoire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 \ldots + \mathbb{X}_{20}$ où, pour tout $k \in [\![1\,;20]\!]$, $\mathbb{X}_k = 1$ si on a obtenu pile au $k^{\text{ème}}$ lancer et $\mathbb{X}_k = 0$ sinon.

Exercice 1 :

Lors d'une soirée au casino, Nadège décide de tester différents jeux : une fois la roulette et deux fois les machines à sous.

Elle note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

1. Pour faciliter l'étude, elle écrit $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \mathbb{X}_3$.
   À quoi les variables aléatoires $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{X}_3$ peuvent-elles alors correspondre ?

Exercice 1 :

Lors d'une soirée au casino, Nadège décide de tester différents jeux : une fois la roulette et deux fois les machines à sous.

Elle note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

1. Pour faciliter l'étude, elle écrit $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \mathbb{X}_3$.
   À quoi les variables aléatoires $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{X}_3$ peuvent-elles alors correspondre ?
2. Yvann souhaite écrire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + 2\mathbb{X}_2$.
   A-t-il raison ? Justifier.

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut également composer la variable aléatoire réelle $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire

$$f \circ \mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}.$$

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut également composer la variable aléatoire réelle $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire

$$f \circ \mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}.$$

Exemple 5 :

Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine. Alors $f(\mathbb{X}) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a\omega + b \end{array}$ notée $f(\mathbb{X}) = a\mathbb{X} + b$.

I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut également composer la variable aléatoire réelle $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire

$$f \circ \mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}.$$

Exemple 5 :

Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine. Alors $f(\mathbb{X}) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a\omega + b \end{array}$ notée $f(\mathbb{X}) = a\mathbb{X} + b$.

ATTENTION

Cette variable aléatoire est généralement notée $f(\mathbb{X})$ mais il faudra bien comprendre $f \circ \mathbb{X}$.

Une variable $\mathbb{X}$ aléatoire étant donnée, on cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un élément de $\mathbb{X}(\Omega)$.

Dans l' exemple (1) :

x	-1	2	5	10
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Une variable $\mathbb{X}$ aléatoire étant donnée, on cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un élément de $\mathbb{X}(\Omega)$.

Dans l' exemple (1) :

x	-1	2	5	10
$P(\mathbb{X}=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Mais on peut aussi définir $P(\mathbb{X} \in \{2, 5, 10\}) = \dfrac{1}{2}$.

Une variable $\mathbb{X}$ aléatoire étant donnée, on cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un élément de $\mathbb{X}(\Omega)$.

Dans l' exemple (1) :

x	-1	2	5	10
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{32}$	$\dfrac{1}{32}$

Mais on peut aussi définir $\mathrm{P}(\mathbb{X}\in\{2,5,10\})=\dfrac{1}{2}$.

La loi de probabilité de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ associe à toute partie A de $\mathbb{X}(\Omega)$ la probabilité $\mathrm{P}(\mathbb{X}\in\mathrm{A})$.

Définition 4 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

On appelle **loi de probabilité** de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{P}_{\mathbb{X}} : & \mathbb{X}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathbb{X} = x). \end{array}$$

Exercice 2 :

Un sac contient 6 jetons : deux numérotés 1, trois numérotés 2 et un numéroté 3. Chaque jeton apparaît avec la même probabilité. On tire simultanément trois jetons. On note $\mathbb{X}$ la somme des numéros portés sur les trois jetons.

Déterminer la loi de $\mathbb{X}$.

Proposition 2 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une variable aléatoire de loi de probabilité $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$.

L'application $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ définit une probabilité sur Ω et on a :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}(\Omega)),\ \mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A}) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{A}}} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{A}}} \mathrm{P}_{\mathbb{X}}(x).$$

Proposition 2 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une variable aléatoire de loi de probabilité $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$.

L'application $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ définit une probabilité sur Ω et on a :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}(\Omega)),\ \mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A}) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{A}}} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{A}}} \mathrm{P}_{\mathbb{X}}(x).$$

Remarques :

1. Dit autrement : on a changé d'univers ! Au lieu de considérer l'univers entier, on travaille désormais avec un univers constitué seulement du support de $\mathbb{X}$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \rightsquigarrow \mathcal{P}(\Omega) \arrow[r, "\mathrm{P}"] \arrow[d, "\mathbb{X}"'] & {[0\,;1]} \\
\mathbb{X}(\Omega) \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mathbb{X}(\Omega)) \arrow[ur, "\mathrm{P}_{\mathbb{X}}"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 2 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une variable aléatoire de loi de probabilité $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$.

L'application $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ définit une probabilité sur Ω et on a :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}(\Omega)),\ \mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A}) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{A}}} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in \mathrm{A}}} \mathrm{P}_{\mathbb{X}}(x).$$

Remarques :

2. La donnée des $\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ suffit à définir $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$.
   On se contente en général de ces « germes de probabilités ».
   Dans certains ouvrages, on définit même :

$$\mathrm{P}_{\mathbb{X}} : \mathbb{X}(\Omega) \longmapsto [0\,;1]$$

au lieu de

$$\mathrm{P}_{\mathbb{X}} : \mathcal{P}(\mathbb{X}(\Omega)) \longmapsto [0\,;1]$$

Exemple 6 :

Reprenons l' exemple (3)

- $P(\mathbb{S}=2) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=2)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.
- $P(\mathbb{S}=3) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=3)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{18}$.
- ...
- $P(\mathbb{S}=7) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=7)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.
- ...
- $P(\mathbb{S}=12) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=12)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.

Exemple 6 :

Reprenons l' exemple (3)

- $P(\mathbb{S}=2) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=2)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.
- $P(\mathbb{S}=3) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=3)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{18}$.
- ...
- $P(\mathbb{S}=7) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=7)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.
- ...
- $P(\mathbb{S}=12) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=12)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.

L'application $P_{\mathbb{S}} : \begin{array}{ccc} [\![2\,;12]\!] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ k & \longmapsto & P(\mathbb{S}=k) \end{array}$ est la loi de probabilité de $\mathbb{S}$.

Exemple 6 :

Reprenons l' exemple (3)

- $P(\mathbb{S}=2)=\dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=2)}{\text{card}\,(\Omega)}=\dfrac{1}{36}$.
- $P(\mathbb{S}=3)=\dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=3)}{\text{card}\,(\Omega)}=\dfrac{1}{18}$.
- ...
- $P(\mathbb{S}=7)=\dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=7)}{\text{card}\,(\Omega)}=\dfrac{1}{6}$.
- ...
- $P(\mathbb{S}=12)=\dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S}=12)}{\text{card}\,(\Omega)}=\dfrac{1}{36}$.

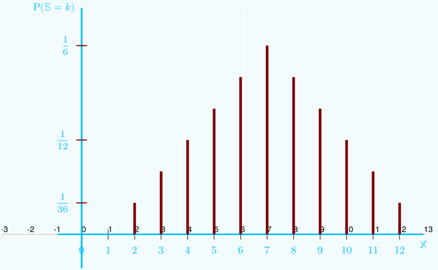
L'application $P_{\mathbb{S}} : \begin{array}{ccc} [\![2\,;12]\!] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ k & \longmapsto & P(\mathbb{S}=k) \end{array}$ est la loi de probabilité de $\mathbb{S}$.

On peut regroupper les résultats dans un tableau :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\mathbb{S}=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

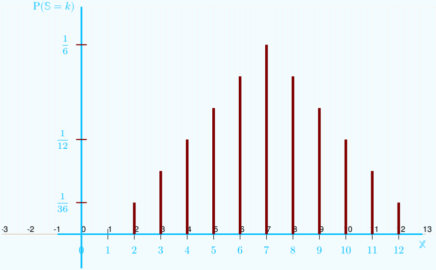
Exemple 6 :

Reprenons l' exemple (3) On peut aussi représenter la loi de $\mathbb{S}$ par un diagramme en bâtons :



Exemple 6 :

Reprenons l' exemple (3) On peut aussi représenter la loi de $\mathbb{S}$ par un diagramme en bâtons :



Pour toute partie A de $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$, on peut alors calculer la probabilité de l'événement $(\mathbb{S} \in \mathrm{A})$.

Par exemple, $\mathrm{P}(\mathbb{S} \in \{4, 6, 11\}) = \mathrm{P}(\mathbb{S} = 4) + \mathrm{P}(\mathbb{S} = 6) + \mathrm{P}(\mathbb{S} = 11)$

$$= \mathrm{P}_{\mathbb{S}}(4) + \mathrm{P}_{\mathbb{S}}(6) + \mathrm{P}_{\mathbb{S}}(11) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{1}{18} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Définition 5 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathbb{X}(\Omega) = \left\{x_1, \cdots, x_p\right\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.

- On appelle espérance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, le réel définit par :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x\mathrm{P}(\mathbb{X} = x).$$

II. Espérance d'une variable aléatoire réelle
1. Définition

Définition 5 :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathbb{X}(\Omega) = \left\{x_1, \cdots, x_p\right\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.

- On appelle espérance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, le réel définit par :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x \mathrm{P}(\mathbb{X} = x).$$

- On dit que $\mathbb{X}$ est une variable centrée si $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = 0$.

Remarques :

1. Dans les démonstrations et les résultats plus théoriques, on reviendra souvent à
$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{X}(\omega)\mathrm{P}(\{\omega\}).$$

Remarques :

1. Dans les démonstrations et les résultats plus théoriques, on reviendra souvent à
$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{X}(\omega)\mathrm{P}(\{\omega\}).$$
2. L'espérance correspond à la moyenne des valeurs prises par $\mathbb{X}$, pondérée par leur probabilité. C'est donc un indicateur de position.

Remarques :

1. Dans les démonstrations et les résultats plus théoriques, on reviendra souvent à
$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{X}(\omega)\mathrm{P}(\{\omega\}).$$
2. L'espérance correspond à la moyenne des valeurs prises par $\mathbb{X}$, pondérée par leur probabilité. C'est donc un indicateur de position.
3. Plus particulièrement, chaque valeur de x, x décrivant $\mathbb{X}(\Omega)$, s'y trouve comptabilisé en proportion de sa probabilité d'occurrence $\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$. Ainsi, plus $\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$ est proche de 1, plus x a d'importance dans le calcul de $\mathrm{E}(\mathbb{X})$.

Exemple 7 :

Reprenons l'exemple l' exemple (1)

x	-1	2	5	10
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

L'espérance de $\mathbb{X}$ est $\mathrm{E}(\mathbb{X})=(-1)\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{32}+10\times\frac{1}{32}=\frac{33}{32}\simeq 1,03$ euros .

C'est la somme qu'on peut espérer gagner par partie en moyenne, en jouant de nombreuses fois.

Exemple 7 :

Reprenons l'exemple l' exemple (1)

x	-1	2	5	10
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{32}$	$\dfrac{1}{32}$

L'espérance de $\mathbb{X}$ est $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = (-1)\times\dfrac{1}{2} + 2\times\dfrac{3}{8} + 5\times\dfrac{3}{32} + 10\times\dfrac{1}{32} = \dfrac{33}{32} \simeq 1,03$ euros .

C'est la somme qu'on peut espérer gagner par partie en moyenne, en jouant de nombreuses fois.

Exemple 8 :

Et si nous reprenons l' exemple (3) ,

$$\mathrm{E}(\mathbb{S}) = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{1}{12} + 4\times\frac{1}{12} + \ldots + 11\times\frac{1}{18} + 12\times\frac{1}{36} = 7.$$

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.
En particulier, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta$

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.
En particulier, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta$

Positivité : Si $\mathbb{X} \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.
En particulier, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta$

Positivité : Si $\mathbb{X} \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.

Croissance : Si $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \leqslant \mathrm{E}(\mathbb{Y})$.

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.
En particulier, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta$

Positivité : Si $\mathbb{X} \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.

Croissance : Si $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \leqslant \mathrm{E}(\mathbb{Y})$.

Inégalité triangulaire : $|\mathrm{E}(\mathbb{X})| \leqslant \mathrm{E}(|\mathbb{X}|)$.

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.
En particulier, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta$

Positivité : Si $\mathbb{X} \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.

Croissance : Si $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \leqslant \mathrm{E}(\mathbb{Y})$.

Inégalité triangulaire : $|\mathrm{E}(\mathbb{X})| \leqslant \mathrm{E}(|\mathbb{X}|)$.

ATTENTION

La notation $\mathbb{X} \geqslant 0$ est un tantinet abusive et signifie que la fonction $\mathbb{X}$ prend des valeurs positives sur Ω *i.e.* $\forall\, \omega \in \Omega$, $\mathbb{X}(\omega) \geqslant 0$.

De même $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y} \iff \forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{X}(\omega) \leqslant \mathbb{Y}(\omega)$.

Exercice 3 :

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges. Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules prises au hasard tombent dans un panier. Si les trois boules sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si deux des boules sont rouges, il gagne 15€, si une seule est rouge, il gagne un lot de 5 €. Le prix du jeton est fixé à 8 €.

1. Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$, et calculer son espérance. En déduire le gain moyen du forain.

Exercice 3 :

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges. Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules prises au hasard tombent dans un panier. Si les trois boules sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si deux des boules sont rouges, il gagne 15€, si une seule est rouge, il gagne un lot de 5 €. Le prix du jeton est fixé à 8 €.

1. Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$, et calculer son espérance. En déduire le gain moyen du forain.
2. L'appareil ne s'avérant pas suffisamment rentable, le forain envisage deux solutions : augmenter de 1 euro le pris du jeton ou bien ajouter une boule blanche dans l'urne. Quelle est la solution la plus rentable pour le forain ?

II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

3. Formule de transfert

La proposition (3) permet déjà d'écrire que $\mathrm{E}(a\mathbb{X}+b) = a\mathrm{E}(\mathbb{X})+b$ pour toute fonction affine $x \longmapsto ax+b$. On peut aller plus loin :

Théorème 4 (Formule de transfert) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathbb{X}(\Omega) = \left\{x_1, \cdots, x_p\right\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{X}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles définie sur $\mathbb{X}(\Omega)$.

Alors :

$$\mathrm{E}(f(\mathbb{X})) = \mathrm{E}(f \circ \mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_k) f(x_k).$$

La proposition (3) permet déjà d'écrire que $\mathrm{E}(a\mathbb{X}+b) = a\mathrm{E}(\mathbb{X})+b$ pour toute fonction affine $x \longmapsto ax+b$. On peut aller plus loin :

Théorème 4 (Formule de transfert) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathbb{X}(\Omega) = \left\{x_1, \cdots, x_p\right\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{X}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles définie sur $\mathbb{X}(\Omega)$.

Alors :

$$\mathrm{E}(f(\mathbb{X})) = \mathrm{E}(f \circ \mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_k) f(x_k).$$

Remarque : Cette formule permet d'éviter le calcul de la loi de $f(\mathbb{X})$ qui peut être compliqué.

Exemple 9 :

On reprend l' exemple (3) où $\mathbb{S}$ est la variable aléatoire qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

Par exemple, on a alors :

$$\mathrm{E}(\mathbb{S}^2) = \sum_{i=2}^{12} s^2 \times \mathrm{P}(\mathbb{S} = s) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{1}{18} + \ldots + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}.$$

Définition 6 (Variance) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle variance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, le réel :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\Big).$$

Définition 6 (Variance) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle variance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, le réel :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\Big).$$

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle
1. Définitions

Définition 6 (Variance) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle variance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, le réel :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\Big).$$

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

Proposition 5 (Formule de König-Huygens) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Alors :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2.$$

Définition 6 (Variance) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle variance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, le réel :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\Big).$$

Proposition 5 (Formule de König-Huygens) :

Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Alors :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2.$$

Proposition 6 :

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $$\mathrm{V}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha^2\mathrm{V}(\mathbb{X}).$$

Comme $(\mathbb{X} - m)^2 \geqslant 0$, la variance $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}((\mathbb{X} - m)^2)$ est positive. Ce qui permet la définition suivante :

Définition 7 (Écart-type) :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle écart-type de $\mathbb{X}$, noté $\sigma(\mathbb{X})$, le réel :

$$\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathbb{X})}.$$

Comme $(\mathbb{X}-m)^2 \geqslant 0$, la variance $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}((\mathbb{X}-m)^2)$ est positive. Ce qui permet la définition suivante :

Définition 7 (Écart-type) :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle écart-type de $\mathbb{X}$, noté $\sigma(\mathbb{X})$, le réel :

$$\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathbb{X})}.$$

Remarque : Une v.a.r $\mathbb{Z} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ est dite centrée si $\mathrm{E}(\mathbb{Z}) = 0$ et réduite si $\sigma(\mathbb{Z}) = 1$.

Par exemple, si $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ est une v.a.r telle que $\sigma(\mathbb{X}) > 0$ alors $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})}$ est centrée réduite

Théorème 7 (Inégalité de Markov [1]) :

Soit $\mathbb{Z} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle **positive**.

Alors :

$$\forall\, a > 0,\ \mathrm{P}(\mathbb{Z} \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathbb{Z})}{a}.$$

Théorème 7 (Inégalité de Markov [1]) :

Soit $\mathbb{Z} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle **positive**.

Alors :

$$\forall\, a > 0,\ \mathrm{P}(\mathbb{Z} \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathbb{Z})}{a}.$$

L'inégalité de Markov donne une majoration de la probabilité qu'une variable aléatoire réelle à valeurs positives soit supérieure ou égale à une constante positive.

Théorème 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}(|\mathbb{X} - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Théorème 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}(|\mathbb{X} - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

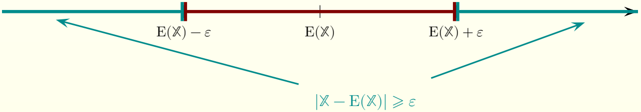


Figure 1 – L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff confirme que la variance est un indicateur de dispersion.

Théorème 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}(|\mathbb{X} - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Remarque : Cette formule fournit un majorant de l'erreur quand on estime que $\mathbb{X} \in]m - \varepsilon, m + \varepsilon[$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}(|\mathbb{X} - m| \geqslant \varepsilon)$ est la probabilité pour que $\mathbb{X}$ prenne des valeurs éloignées de $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ d'au moins ε. Cette probabilité est faible dès que $\mathrm{V}(\mathbb{X})$ est petit et que ε est grand.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vise donc à montrer que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ prend des valeurs proches de $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ avec une grande probabilité, mais elle donne, en général une majoration assez grossière.

IV. Lois usuelles

Définition 8 (Loi uniforme) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $\mathrm{A} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$, un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme sur A et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\mathrm{A})$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \mathrm{A}$.

Définition 8 (Loi uniforme) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $\mathrm{A} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$, un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme sur A et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\mathrm{A})$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \mathrm{A}$.
- $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!], \quad \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_k) = \dfrac{1}{n}.$

Remarques :

- C'est en fait la loi d'équiprobabilité sur A.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(\mathbb{X} = x)$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$

Remarques :

- C'est en fait la loi d'équiprobabilité sur A.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$

- On retrouve souvent dans les exercices la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$:

x	1	2	$\cdots$	n
$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$

Par exemple, le résultat d'un lancer de dé supposé honnête suit la loi $\mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

Proposition 9 :

Si $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Définition 9 (Loi de Bernoulli) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \{0, 1\}$

Définition 9 (Loi de Bernoulli) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathrm{P}(\mathbb{X} = 1) = p$ et $\mathrm{P}(\mathbb{X} = 0) = 1 - p$.

Définition 9 (Loi de Bernoulli) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathrm{P}(\mathbb{X} = 1) = p$ et $\mathrm{P}(\mathbb{X} = 0) = 1 - p$.

On pose souvent $q = 1 - p$.

Remarques :

- En résumé :

x	0	1
$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$	$1 - p$	p

Remarques :

- En résumé :

x	0	1
$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$	$1-p$	p

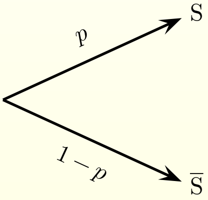
- Cette loi modélise le succès $(\mathbb{X} = 1)$ ou l'échec $(\mathbb{X} = 0)$ à une expérience aléatoire donnée. p est la probabilité de succès.
  On dira donc qu'une expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli lorsqu'elle admet seulement deux issues possibles, moralement appelées échec et succès.

Remarques :

- En résumé :

x	0	1
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)$	$1-p$	p

- Cette loi modélise le succès ($\mathbb{X}=1$) ou l'échec ($\mathbb{X}=0$) à une expérience aléatoire donnée. p est la probabilité de succès.
  On dira donc qu'une expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli lorsqu'elle admet seulement deux issues possibles, moralement appelées échec et succès.
- L'arbre correspondant s'appelle une épreuve de Bernoulli.



Exemple 10 :

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».

$$p = \frac{1}{2}.$$

IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Exemple 10 :

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».
$$p = \frac{1}{2}.$$
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès « obtenir un six » et comme échec « ne pas obtenir un six ».
$$p = \frac{1}{6}.$$

Exemple 10 :

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».
$$p = \frac{1}{2}.$$
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès « obtenir un six » et comme échec « ne pas obtenir un six ».
$$p = \frac{1}{6}.$$
- Interroger une personne dans la rue et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « la personne est gauchère ».
$$p \simeq 0,13.$$

Proposition 10 :

Si $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ alors :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathbb{X}) = p(1-p).$$

Définition 10 (Loi binomiale) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle schéma de Bernoulli (d'ordre n) toute répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

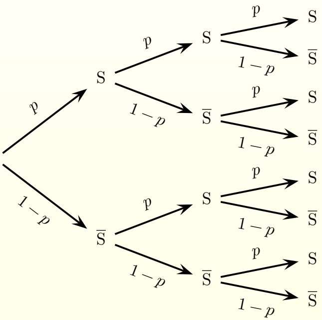


Figure 1 – Schéma de Bernoulli d'ordre 3.

Exemple 11 :

- Soit n un entier naturel non nul.
  Répéter n fois chacune des expériences de l' exemple (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).

Exemple 11 :

- Soit n un entier naturel non nul.
  Répéter n fois chacune des expériences de l' exemple (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).
- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.

Exemple 11 :

- Soit n un entier naturel non nul.

  Répéter n fois chacune des expériences de l' exemple (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).

- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.

  1. On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.

Exemple 11 :

- Soit n un entier naturel non nul.

  Répéter n fois chacune des expériences de l' exemple (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).

- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.

  1. On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.
  2. On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.

Exemple 11 :

- Soit n un entier naturel non nul.

  Répéter n fois chacune des expériences de l' exemple (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).

- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.

  1. On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.
  2. On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.
  3. Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La boule est bleue » dont la probabilité est $p = \dfrac{2}{3}$.

Exemple 11 :

- Soit n un entier naturel non nul.

  Répéter n fois chacune des expériences de l' exemple (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).

- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.

  1. On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.
  2. On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.
  3. Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La boule est bleue » dont la probabilité est $p = \dfrac{2}{3}$.
  4. Comme les dix tirages se font avec remise, les tirages sont identiques et indépendants : on a bien un schéma de Bernoulli (d'ordre $n = 10$).

Définition II :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle**, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.

Définition II :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle**, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.
- $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Définition II :

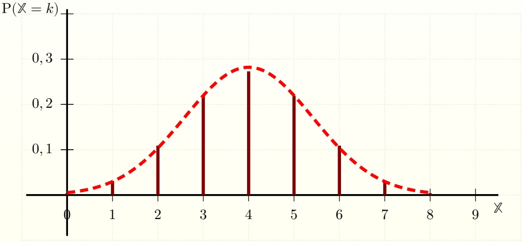
Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle**, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.
- $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarque : On peut vérifier que :

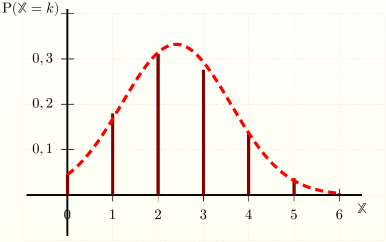
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathbb{X} = k) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= [p + (1-p)]^n \\ &= 1.\end{aligned}$$



$$P(\mathbb{X}=k)=\binom{8}{k}0,5^k0,5^{8-k}=\binom{8}{k}0,5^8.$$

$\mathbb{X}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\mathbb{X}=k)$	0,004	0,031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

Figure 2 – Représentation (symétrique) de $\mathcal{B}(8;\,0,5)$.



$$\mathrm{P}(\mathbb{X}=k)=\binom{6}{k}0,4^k 0,6^{6-k}.$$

$\mathbb{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=k)$	0,046	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

Figure 3 – Représentation (asymétrique) de $\mathcal{B}(6;\,0,4)$.

Exemple 12 (Classique) :

Une urne contient des boules blanches et noires avec une proportion p de boules blanches.

On pioche n boules avec remise et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées après les n tirages.

$\mathbb{X}$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 12 (Classique) :

Une urne contient des boules blanches et noires avec une proportion p de boules blanches.

On pioche n boules avec remise et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées après les n tirages.

$\mathbb{X}$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 4 :

Une personne sur 1500 est daltonienne. Combien de personnes doit-on choisir pour être sûr à 95% d'avoir au moins un daltonien ?

IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Proposition 11 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Alors,

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = np.$$

Exercice 5 :

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?

Exercice 5 :

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?

Exercice 5 :

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
3. Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?

Exercice 5 :

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
3. Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?
4. Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 qui passent le concours.

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.

V. Couple de variables aléatoires
1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;6]\!]$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.

V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;6]\!]$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;6]\!]$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.
Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $[\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.

V. Couple de variables aléatoires
1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1\,;6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.
Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1\,;6 \rrbracket \times \llbracket 1\,;6 \rrbracket$.
On veut déterminer la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;6]\!]$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $[\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.

On veut déterminer la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i\,;j) \in [\![1\,;6]\!]^2$,

$$\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathrm{Y} = j)\big).$$

Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $[\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.

On veut déterminer la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i\,;j) \in [\![1\,;6]\!]^2$,

$$\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathrm{Y} = j)\big).$$

Or, $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j)\big) = \mathrm{P}(\mathbb{X} = i) \times \mathrm{P}_{(\mathbb{X}=i)}(\mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{i} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $[\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.
On veut déterminer la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
Cela revient à chercher, pour tout couple $(i\,;j) \in [\![1\,;6]\!]^2$,

$$\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathrm{Y} = j)\big).$$

Or, $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j)\big) = \mathrm{P}(\mathbb{X} = i) \times \mathrm{P}_{(\mathbb{X}=i)}(\mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{i} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

Commentaires :

- Ce tableau donne la loi, dite conjointe, du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

Commentaires :

- Ce tableau donne la loi, dite conjointe, du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
- Les marges (obtenues en sommant les valeurs) comportent les lois de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$. On les appellera donc les lois marginales.

Définition 12 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω à valeurs, respectivement, dans des ensembles E et F quelconques.

- Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est également une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Définition 12 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω à valeurs, respectivement, dans des ensembles E et F quelconques.

- Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est également une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.
- La loi de probabilité du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est appelée loi conjointe de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Définition 12 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω à valeurs, respectivement, dans des ensembles E et F quelconques.

- Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est également une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.
- La loi de probabilité du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est appelée loi conjointe de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
- Les lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont appelées lois marginales du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Proposition 12 (Lois marginales et loi conjointe) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ deux variables aléatoires sur des ensembles E et F quelconques.

$$\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big).$$

$$\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big).$$

Proposition 12 (Lois marginales et loi conjointe) :

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ deux variables aléatoires sur des ensembles E et F quelconques.

$$\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big).$$

$$\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big).$$

Moralité : Si on connaît la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, on peut déterminer les lois marginales.

En revanche, la réciproque est fausse : si on connaît les lois marginales, on ne peut déterminer la loi conjointe.

On représente souvent la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big)$ en fonction des valeurs possibles de $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ et $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$.

On représente souvent la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big)$ en fonction des valeurs possibles de $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ et $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$.

Le tableau ci-dessous illustre le calcul des lois marginales. On note :

- $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une v.a de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall\, k \in [\![1\,;m]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.

V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

On représente souvent la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big)$ en fonction des valeurs possibles de $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ et $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$.

Le tableau ci-dessous illustre le calcul des lois marginales. On note :

- $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une v.a de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall\, k \in [\![1\,; m]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.
- $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ une v.a de support $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall\, k \in [\![1\,; n]\!]$, $y_k \in \mathrm{F}$.

On représente souvent la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big)$ en fonction des valeurs possibles de $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ et $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$.

Le tableau ci-dessous illustre le calcul des lois marginales. On note :

- $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une v.a de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall\, k \in [\![1\,;m]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.
- $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ une v.a de support $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $y_k \in \mathrm{F}$.

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	y_1	y_2	...	y_n	Total
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	...	$p_{1,n}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x_1) = \sum_{j=1}^{n} p_{1,j}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	...	$p_{2,n}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x_2) = \sum_{j=1}^{n} p_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$p_{m,1}$	$p_{m,2}$	...	$p_{m,n}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x_m) = \sum_{j=1}^{n} p_{m,j}$
Total	$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_1) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,1}$	$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_2) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,2}$	...	$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_n) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,n}$	1

Définition 13 :

Soient E et F deux ensembles quelconques.

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ deux variables aléatoires. Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$.

On appelle loi conditionnelle sachant que $(\mathbb{X} = x)$ la loi définie par :

$$\mathrm{P}_{(\mathbb{X}=x)}(\mathbb{Y} = y) = \frac{\mathrm{P}((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y))}{\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)} \qquad \text{pour } y \in \mathbb{Y}(\Omega)$$

Définition 13 :

Soient E et F deux ensembles quelconques.

Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ deux variables aléatoires. Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$.

On appelle loi conditionnelle sachant que $(\mathbb{X} = x)$ la loi définie par :

$$\mathrm{P}_{(\mathbb{X}=x)}(\mathbb{Y} = y) = \frac{\mathrm{P}((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y))}{\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)} \qquad \text{pour } y \in \mathbb{Y}(\Omega)$$

De même, pour $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$, on définit la loi conditionnelle sachant que $(\mathbb{Y} = y)$ par :

$$\mathrm{P}_{(\mathbb{Y}=y)}(\mathbb{X} = x) = \frac{\mathrm{P}((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y))}{\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y)} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{X}(\Omega)$$

Exercice 6 :

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement 2 boules. On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{X} = 0$ si la première boule est noire et $\mathbb{X} = 1$ si elle est blanche. On définit $\mathbb{Y}$ de la même façon pour la deuxième boule.

1. On effectue les tirages avec remise. Déterminer la loi de probabilité du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ainsi que les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$ conditionnée par $\mathbb{Y}$ ainsi que la loi de $\mathbb{Y}$ conditionnée par $\mathbb{X}$.

Exercice 6 :

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement 2 boules. On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{X} = 0$ si la première boule est noire et $\mathbb{X} = 1$ si elle est blanche. On définit $\mathbb{Y}$ de la même façon pour la deuxième boule.

1. On effectue les tirages avec remise. Déterminer la loi de probabilité du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ainsi que les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$ conditionnée par $\mathbb{Y}$ ainsi que la loi de $\mathbb{Y}$ conditionnée par $\mathbb{X}$.
2. Mêmes questions pour un tirage sans remise.

VI. Variables aléatoires indépendantes

VI. Variables aléatoires indépendantes

Définition 14 :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires sur Ω.

On dit que les deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega), \forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)) = \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) \times \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y)$$

VI. Variables aléatoires indépendantes

Exemple 13 :

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes

VI. Variables aléatoires indépendantes

Exemple 13 :

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes

VI. Variables aléatoires indépendantes

Exercice 7 :

Soient deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ dont les tableaux des lois conjointes sont donnés ci-dessous. Lequel correspond à des variables indépendantes ?

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	Total
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$P(\mathbb{X}=1)=\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$P(\mathbb{X}=2)=\frac{1}{3}$
Total	$P(\mathbb{Y}=1)=\frac{2}{3}$	$P(\mathbb{Y}=2)=\frac{1}{3}$	1

VI. Variables aléatoires indépendantes

Exercice 7 :

Soient deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ dont les tableaux des lois conjointes sont donnés ci-dessous. Lequel correspond à des variables indépendantes ?

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	Total
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$P(\mathbb{X}=1)=\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$P(\mathbb{X}=2)=\frac{1}{3}$
Total	$P(\mathbb{Y}=1)=\frac{2}{3}$	$P(\mathbb{Y}=2)=\frac{1}{3}$	1

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	Total
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(\mathbb{X}=1)=\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(\mathbb{X}=2)=\frac{1}{2}$
Total	$P(\mathbb{Y}=1)=\frac{1}{2}$	$P(\mathbb{Y}=2)=\frac{1}{2}$	1

VI. Variables aléatoires indépendantes

1. Caractérisation

Proposition 13 :

Soient (Ω, P) un espace probabilisé et $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires sur Ω.

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall\, \mathrm{A} \subset \mathbb{X}(\Omega), \forall\, \mathrm{B} \subset \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}\Big((\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \cap (\mathbb{Y} \in \mathrm{B})\Big) = \mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathbb{Y} \in \mathrm{B})$$

Proposition 13 :

Soient (Ω, P) un espace probabilisé et $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires sur Ω.

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall\, \mathrm{A} \subset \mathbb{X}(\Omega), \forall\, \mathrm{B} \subset \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}\Big((\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \cap (\mathbb{Y} \in \mathrm{B}) \Big) = \mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathbb{Y} \in \mathrm{B})$$

Corollaire 1 :

Si $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires indépendantes, et f, g sont deux applications définies respectivement sur $\mathbb{X}(\Omega)$ et $\mathbb{Y}(\Omega)$, alors les variables aléatoires $f(\mathbb{X})$ et $g(\mathbb{Y})$ sont indépendantes.

Définition 15 :

Les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \cdots \mathbb{X}_n$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour toute famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{X}_1(\Omega) \times \mathbb{X}_2(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{X}_n(\Omega)$ les événements $(\mathbb{X}_1 = x_1), (\mathbb{X}_2 = x_2), \cdots, (\mathbb{X}_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants, *i.e.* si, et seulement si

$$\forall\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_i = x_i).$$

Exemples 14 :

- Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si $\mathbb{X}_i$ est le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.

Exemples 14 :

- Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si $\mathbb{X}_i$ est le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.
- De manière plus générale, si on effectue n fois la même expérience, de manière indépendante, et si $\mathbb{X}_i$ est le résultat de la $i^{\text{ème}}$, $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.

VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 14 :

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

1. $\forall\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\mathbb{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathbb{X}_1 \in \mathrm{A}_1)$, $(\mathbb{X}_2 \in \mathrm{A}_2)$, $\cdots$, $(\mathbb{X}_n \in \mathrm{A}_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i).$$

Proposition 14 :

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

1. $\forall\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\mathbb{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathbb{X}_1 \in \mathrm{A}_1)$, $(\mathbb{X}_2 \in \mathrm{A}_2)$, ..., $(\mathbb{X}_n \in \mathrm{A}_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i).$$

2. Toute sous-famille de $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ est indépendante.

Proposition 14 :

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

1. $\forall\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\mathbb{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathbb{X}_1 \in \mathrm{A}_1)$, $(\mathbb{X}_2 \in \mathrm{A}_2)$, $\cdots$, $(\mathbb{X}_n \in \mathrm{A}_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i).$$

2. Toute sous-famille de $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ est indépendante.

En considérant toutes les sous-familles à deux éléments d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, on en déduit aisément le résultat suivant :

Corollaire 2 :

Toute famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sont deux à deux indépendantes.

VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 14 :

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

1. $\forall\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\mathbb{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathbb{X}_1 \in \mathrm{A}_1)$, $(\mathbb{X}_2 \in \mathrm{A}_2)$, $\cdots$, $(\mathbb{X}_n \in \mathrm{A}_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i).$$

2. Toute sous-famille de $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ est indépendante.

Corollaire 2 :

Toute famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sont deux à deux indépendantes.

ATTENTION Comme dans le cas des événements, la réciproque est fausse.

Proposition 15 (Lemme des coalitions) :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in [\![1\,; n-1]\!]$.

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes sur Ω.

Pour toutes application $f : \mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \longmapsto \mathbb{R}$, $f(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p)$ et $g(\mathbb{X}_{p+1}, \dots, \mathbb{X}_n)$ sont indépendantes.

VI. Variables aléatoires indépendantes

3. Application à la loi binomiale

Théorème 16 :

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$.

Alors $\mathbb{X}_1 + ... + \mathbb{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Théorème 16 :

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$.

Alors $\mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Comme $\mathbb{X}_i$ comptabilise le succès ou l'échec à la $i^{\text{ème}}$ épreuve de Bernoulli, la variable aléatoire $\mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_n$ représente le nombre de succès de n expériences indépendantes ayant probabilité p de réussir. Une telle variable suit une loi binomiale de paramètre n et p.

Théorème 17 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}).$$

Théorème 17 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}).$$

Corollaire 3 :

Si $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont des variables mutuellement indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1) \dots \mathrm{E}(\mathbb{X}_n).$$

Théorème 17 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}).$$

Corollaire 3 :

Si $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont des variables mutuellement indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1) \dots \mathrm{E}(\mathbb{X}_n).$$

ATTENTION La réciproque est fausse en général.

Contre-Exemple 15 :

Soient U et V deux urnes, que l'on remplit, de manière aléatoire avec deux boules.

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de boules dans U, $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'urnes vides.

	$(\mathbb{X}=0)$	$(\mathbb{X}=1)$	$(\mathbb{X}=2)$	Total
$(\mathbb{Y}=0)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$(\mathbb{Y}=1)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

z	$P(\mathbb{X}\mathbb{Y}=z)$
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$
2	0

Alors $\mathbb{P}(\mathbb{X}=0)=\mathbb{P}(\mathbb{X}=2)=\dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\mathbb{X}=1)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{Y}=0)=\mathbb{P}(\mathbb{Y}=1)=\dfrac{1}{2}$.

On calcule $E(\mathbb{X})=1$, $E(\mathbb{Y})=\dfrac{1}{2}$ d'où $E(\mathbb{X}\mathbb{Y})=\dfrac{1}{2}=E(\mathbb{X})E(\mathbb{Y})$ mais $\mathbb{P}((\mathbb{X}=0)\cap(\mathbb{Y}=0))=0\neq\dfrac{1}{8}=\mathbb{P}((\mathbb{X}=0))\mathbb{P}((\mathbb{Y}=0))$. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

VII. Covariance de deux variables aléatoires

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Définition 16 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des variables aléatoires réelles.

On appelle covariance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, notée $\mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, le réel

$$\begin{aligned} \mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathrm{E}(\mathbb{Y}))\Big). \end{aligned}$$

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Définition 16 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des variables aléatoires réelles.

On appelle covariance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, notée $\mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, le réel

$$\begin{aligned} \mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathrm{E}(\mathbb{Y}))\Big). \end{aligned}$$

On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont décorrélées si $\mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

Définition 16 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des variables aléatoires réelles.

On appelle covariance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, notée $Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, le réel

$$\begin{aligned} Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathrm{E}(\mathbb{Y}))\Big). \end{aligned}$$

On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont décorrélées si $Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

La covariance est donc la moyenne des produits des écarts des valeurs à la moyenne de chaque série. Elle évalue la dépendance linéaire entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. D'après le théorème (17), si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes alors $Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Définition 16 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des variables aléatoires réelles.

On appelle covariance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, notée $\mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, le réel

$$\begin{aligned}\mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathrm{E}(\mathbb{Y}))\Big).\end{aligned}$$

On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont décorrélées si $\mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

La covariance est donc la moyenne des produits des écarts des valeurs à la moyenne de chaque série. Elle évalue la dépendance linéaire entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. D'après le théorème (17), si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes alors $\mathrm{C}ov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

ATTENTION La réciproque est fausse.

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Proposition 18 :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des variables aléatoires réelles.

Alors, $$\mathrm{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y}) + 2\mathrm{C}ov(\mathbb{X},\mathbb{Y}).$$

Si, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont décorrélées alors $\mathrm{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y})$.

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Corollaire 4 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y}).$$

Corollaire 4 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y}).$$

Le corollaire (4) se généralise aisément au cas de n variables aléatoires mutuellement indépendantes :

Proposition 19 :

Si $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes alors

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_n) = \mathrm{V}(\mathbb{X}_1) + \ldots + \mathrm{V}(\mathbb{X}_n).$$

« La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est la somme de leur variance. »

Corollaire 5 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Alors,

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Corollaire 5 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors,

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Exercice 8 :

Soit $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{1, \dots, \mathrm{N}\}$. On pose $\mathbb{X} = \mathbb{U} - \mathbb{V}$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$.

Déterminer la covariance entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : ***Correlation vs Indépendance***

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : ***Correlation vs Indépendance***

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.*

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : ***Correlation vs Indépendance***

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.*

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des évènements des variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.*

VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : ***Correlation vs Indépendance***

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.*

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des évènements des variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.*

Il est théoriquement démontré que si deux variables sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées. Autrement dit, si les probabilités de réalisation des événements liés aux variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *vérifient la condition d'indépendance alors les valeurs de ces variables n'ont pas de liaison linéaire entre elles. Par conséquent, si deux variables sont corrélées alors elles sont nécessairement dépendantes i.e. elles ne sont pas indépendantes.*

Un peu d'histoire : ***Correlation vs Indépendance***

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.*

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des évènements des variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.*

Il est théoriquement démontré que si deux variables sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées. Autrement dit, si les probabilités de réalisation des événements liés aux variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *vérifient la condition d'indépendance alors les valeurs de ces variables n'ont pas de liaison linéaire entre elles. Par conséquent, si deux variables sont corrélées alors elles sont nécessairement dépendantes i.e. elles ne sont pas indépendantes.*

Ce résultat laisse alors la possibilité aux situations ou des variables seraient dépendantes sans être corrélées.