Chapitre

XXX Matrices et applications linéaires

La Matrice est universelle. Elle est omniprésente.

Elle est avec nous ici, en ce moment même. Tu la vois chaque fois que tu regardes par la fenêtre, ou lorsque tu allumes la télévision.

Morpheus

CONTENU

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **finie**.

I/ Représentations matricielles

I.1 Matrice d'un vecteur

Définition 1 : Soient E et un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathrm{E}$, un vecteur de E.

On appelle *matrice de x dans la base $\mathcal{B}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

ATTENTION Les matrices dépendent de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Exemple 1 : Dans l'espace des vecteurs $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si on considère $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'une manière générale, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, pour tout vecteur $u\,(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Proposition 1 :
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E.

Alors, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{\mathcal{B}} : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^5)$, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((\mathrm{X}+1)^5\right)$.

Même question dans la base de Taylor centrée en -1 : $(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, \dots, (\mathrm{X}+1)^5)$.

I.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 2 : Soient E et un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ une famille de vecteurs de E.

On appelle *matrice de la famille* $(u_1, \dots, u_p)$ *dans la base* $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall\, j \in [\![1, p]\!],\ u_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n.$$

Exemples 2 :

— Dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, si on considère $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{w} = 4\vec{i}$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{array} \end{array}$$

— Dans $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, si on considère $\vec{u} = (1\,;2\,;3)$ et $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

— Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\mathcal{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathrm{I}_n$.

Exercice 2 : Écrire la matrice des polynômes $\mathrm{P}_i(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} + a)^i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ puis dans celle de Taylor centrée en $-a$.

I.3 Matrice d'une application linéaire

Définition 3 : Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

— E de dimension p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$.

— F de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

On appelle *matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$, la matrice de la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

$$\forall\, j \in [\![1,p]\!], \quad u(e_j) = m_{1,j}f_1 + m_{2,j}f_2 + \dots + m_{n,j}f_n.$$

Commentaires :

— Comprenez bien que pour remplir la matrice, on a calculé les images $u(e_1)$, $u(e_2)$, ..., $u(e_p)$ des éléments de la base $\mathcal{B}$ de E et que l'on a décomposé chacune d'elle dans la base $\mathcal{B}'$ de F (disposé en colonne dans la matrice).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$$

— $\dim(\mathrm{E})$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(\mathrm{F})$ = nombre de lignes de la matrice.

Exemple 3 : Écrire « Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique » signifie alors que : $f(1) = 3\mathrm{X} + 1$, $\quad f(\mathrm{X}) = 4\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}$ $\quad$ et $\quad f(\mathrm{X}^2) = 5\mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 2$.

ATTENTION Dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, les coordonnées de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ sont $(c\,;b\,;a)$!

Exercice 3 : Pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $f_{\mathrm{A}} : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, donner sans calcul, $f_{\mathrm{A}}(1,0,0)$, $f_{\mathrm{A}}(0,1,0)$ et $f_{\mathrm{A}}(0,0,1)$ et calculer $f_{\mathrm{A}}(1,2,3)$ et $f_{\mathrm{A}}(-1,3,2)$ en utilisant les colonnes de A.

Exemple 4 : Pour tout $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{I}_n$.

Exemple 5 (Forme linéaire) : Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$ une forme linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On prend $(1_{\mathbb{K}})$ pour base de $\mathbb{K}$.

En notant, $\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, $a_j = \varphi(e_j)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 6 :

1. Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y)_{\mathcal{B}} & \longmapsto & (x+y, 2x-y, 3y)_{\mathcal{B}'} \end{array}$ où $\begin{cases} \mathcal{B} = (e_1, e_2) \\ \mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3) \end{cases}$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

   On a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u(e_1) = u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 1f_1 + 2f_2 + 0f_3 \\ \bullet\ u(e_2) = u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 1f_1 - 1f_2 + 3f_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

2. Soit $\mathcal{C} = \left(e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = e_1 + 2e_2\,; e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -e_1 + e_2\right)$.

   Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u(e'_1) = u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ \bullet\ u(e'_2) = u\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}.$$

3. Soit $\mathcal{C}' = (f'_1 = f_1 + f_2\,; f'_2 = f_2 - f_3\,; f'_3 = f_3)$.

Alors :

$$\left.\begin{array}{ll}
\bullet\ u(e_1) = 1f_1 + 2f_2 + 0f_3 & = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
\quad = f_1 + f_2 + f_2 - f_3 + f_3 & \\
\quad = f_1' + f_2' + f_3' & = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{C}'} \\
\bullet\ u(e_2) = 1f_1 - 1f_2 + 3f_3 & = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
\quad = f_1' - 2f_2' + f_3' & = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{C}'}
\end{array}\right\} \implies \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}.$$

4. Enfin,

$$\left.\begin{array}{ll}
\bullet\ u(e_1') = 3f_1 + 6f_3 & = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
\quad = 3f_1' - 3f_2' + 3f_3' & = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{C}'} \\
\bullet\ u(e_2') = -3f_2 + 3f_3 & = \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
\quad = -3f_2' & = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{C}'}
\end{array}\right\} \implies \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix}3 & 0\\-3 & -3\\3 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}.$$

La matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies au départ ET à l'arrivée !

Exercice 4 : On définit l'application $u : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y)$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$.
2. On considère $e_1' = (1, 0, 0)$, $e_2' = (1, 1, 0)$ et $e_3' = (1, 1, 1)$.

   Justifier que $\mathcal{B}' = (e_1', \epsilon_2', e_3')$ est également une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}(u)$.
3. On pose $\mathcal{C}' = (f_1', f_2')$ avec $f_1' = (1, 1)$ et $f_2' = (1, -1)$.

En admettant que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}}(u)$.

Expliquer pourquoi les calculs sont plus compliqués quand on choisit une autre base que la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 7 (Projecteur et symétrie) : Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (e_1, \dots, e_r)$, $\mathcal{B}_{\mathrm{G}} = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ des bases respectives de F et G.

Notons $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\mathrm{F}} ; \mathcal{B}_{\mathrm{G}})$ une base de E adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

- Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

- Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -\mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Remarque : Dans la base $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_{\mathrm{G}} ; \mathcal{B}_{\mathrm{F}})$ ces endomorphismes ont pour matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & \mathrm{I}_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & \mathrm{I}_r \end{pmatrix}.$$

I.4 Isomorphisme structurel

Théorème 2 :
Soient
— E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;
— F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

Alors l'application $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$ est un isomorphisme.

À retenir 1 :
Ce théorème signifie que :
Unicité de la matrice associée :

$$\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E} ; \mathrm{F}), \ \exists ! \mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Unicité de l'application linéaire associée :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \ \exists ! f \in \mathscr{L}(\mathrm{E} ; \mathrm{F}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

On pourra ainsi (souvent) raisonner indifféremment sur les matrices ou sur les applications linéaires.

ATTENTION Cette isomorphisme est non canonique *i.e.* il dépend des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ choisies.

Corollaire 2.1 :
Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie alors $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ aussi et on a :

$$\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F})\,.$$

II/ Matrice(S) d'une application linéaire

II.1 Image d'un vecteur par une application linéaire

Exercice 5 (Introduction) : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ sont respectivement des bases de E et F.

Soit $x = 10e_1 - 7e_2$. Déterminer $u(x)$.

Théorème 3 :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie respectivement rapportés aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\Big(u(x)\Big) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) & \times & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \\ \mathrm{Y} & = & \mathrm{A} & \times & \mathrm{X}. \end{array}$$

Où $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\Big(u(x)\Big)$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ et $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Exemple 8 : Reprenons l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y)_{\mathcal{B}} & \longmapsto & (x+y, 2x-y, 3y)_{\mathcal{B}'} \end{array}$ de l' exemple (6) où

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On peut calculer l'image de $(5\,;-2)$ de deux manières maintenant :

1. $u(\,(5\,;-2)\,) = (3\,;12\,;-6)$.
2. $u(\,(5\,;-2)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

À retenir 2 :
Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice alors sa $j^{\text{ème}}$ colonne C_j s'obtient par le produit matriciel $\mathrm{C}_j = \mathrm{A} \cdot \mathrm{E}_j$ où E_j la $j^{\text{ème}}$ matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 9 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{E}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{C}_2}$$

II.2 Matrice d'une composée d'applications linéaires

Exercice 6 (Introduction) : On munit respectivement $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ des bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, et $\mathcal{D} = (g_1, g_2)$.

On considère :

- $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\,;\mathbb{R}^4\right)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- $v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^4\,;\mathbb{R}^2\right)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u)$.

Théorème 4 :
Soient

— E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;
— F un $\mathbb{K}$-ev de dimension q muni d'une base $\mathcal{C}$;
— G un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{D}$.

On considère deux applications linéaires $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).$$

Corollaire 4.1 :
Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathcal{B}$ une base de E de dimension finie n et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Alors,

- u est un projecteur si, et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.
- u est une symétrie si, et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$.

Exercice 7 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x\,;y) = (3x+6y\,;-x-2y)$.

Écrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et en déduire que f est un projecteur.

II.3 Matrice de la réciproque d'un isomorphisme

Théorème 5 :
Soient

— E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
— F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

On considère $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

$$u \text{ est un isomorphisme} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\right)^{-1}.$$

Exercice 8 : Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ (a\,;b\,;c) & \longmapsto & a+b+b\mathrm{X}+(b+c)\mathrm{X}^2. \end{array}$$

Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Corollaire 5.1 :
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1,\dots,u_n) \in \mathrm{E}^n$ une famille d'éléments de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n) \text{ est inversible} \iff (u_1,\dots,u_n) \text{ est une base de E.}$$

Autrement dit, une matrice carrée est inversible si, et seulement si les vecteurs formés par ses colonnes forment une base de E.

[0]. Je vous rappelle que l'on sait qu'un tel morphisme existe et est même unique d'après le chapitre précédent d'algèbre linéaire.

Exemple 10 (Matrice de Vandermonde) : Soient a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, $(L_0, \dots, L_n)$ les polynômes de Lagrange associés.

On rappelle que, dans les cas où les a_i sont distincts, $(L_0, \dots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et que tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ se décompose donc de manière unique dans cette base sous la forme :

$$P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + \dots + P(a_n)L_n.$$

La matrice de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange est donc :

$$M(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que si a_0, a_1, ..., a_n sont deux à deux distincts alors la matrice $M(a_0, \dots, a_n)$ est inversible.

III/ Changement de bases

III.1 Matrice de passage

Définition 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E.

On appelle *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$*, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Exemple 11 :

1. Dans le plan $\vec{\mathcal{P}}$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

   La famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ forme une base de $\vec{\mathcal{P}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_2$, la matrice de passage de la base canonique $(e_1\,; e_2)$ à la base $(u(\theta); v(\theta))$ où $u(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et $v(\theta) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$ est :

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

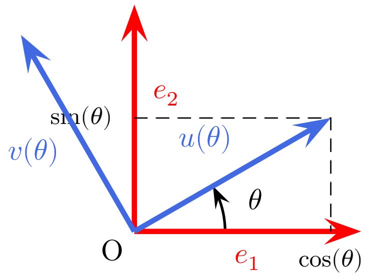

Figure XXX.1 – La matrice de passage $P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de la base $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ à la base $\mathcal{B}_\theta = (u(\theta)\,;v(\theta))$ est une matrice de rotation.

Exercice 9 : On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ où $\begin{cases} e_1 &= (1\,;0) \\ e_2 &= (1\,;1) \end{cases}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 &= (-1\,;1) \\ \varepsilon_2 &= (0\,;1) \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
3. Vérifier que $PQ = QP = I_2$.

Tout d'abord quelques propriétés qui découlent de la définition :

Proposition 6 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On considère $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases de E. Alors :

1. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
2. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.
3. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.
4. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

ATTENTION | à l'ordre des bases dans $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$!

Exemple 12 : En reprenant les exemples précédents :

1. $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où, } \begin{cases} \vec{i} &= \dfrac{2}{7}\vec{u} - \dfrac{1}{7}\vec{v} \\ \vec{j} &= \dfrac{1}{7}\vec{u} + \dfrac{3}{7}\vec{v} \end{cases}$$

CHAPITRE XXX. MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

2. $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

$$\text{D'où, } \begin{cases} e_1 &= \cos(\theta)u(\theta) + \sin(\theta)v(\theta) \\ e_2 &= -\sin(\theta)u(\theta) + \cos(\theta)v(\theta) \end{cases}$$

III.2 Formules de changement de bases

Dans une soirée, une matrice propose à une matrice inversible de danser avec elle :

Ah non, désolée je ne reste pas, je suis de passage !

Proposition 7 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et, pour tout $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ les matrices respectives des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Alors :
$$X = PX'.$$

$$\begin{array}{ccc} E, \mathcal{B} & \xrightarrow[P^{-1}]{Id_E} & E, \mathcal{B}' \\ X & & X' \end{array}$$

Remarque : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donne les anciennes coordonnées (dans $\mathcal{B}$) en fonction des nouvelles (dans $\mathcal{B}'$) ! Si l'on veut les nouvelles en fonction des anciennes, il faut inverser la matrice de passage : $X' = P^{-1}X$.

Théorème 8 :
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathscr{L}(E; F)$.

Notons $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Alors :
$$A' = Q^{-1}AP.$$

Vocabulaire : On dit alors que les matrices A et A' sont *équivalentes*.

On pourra vérifier que la relation d'équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}, \mathcal{B} \arrow[r, "u", "\mathrm{A}"'] & \mathrm{F}, \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "\mathrm{Q}^{-1}"'] \\
\mathrm{E}, \mathcal{B}' \arrow[u, "\mathrm{Id}_\mathrm{E}", "\mathrm{P}"'] \arrow[r, "u", "\mathrm{A}'"'] & \mathrm{F}, \mathcal{C}' \arrow[u, "\mathrm{Q}", "\mathrm{Id}_\mathrm{F}"']
\end{tikzcd}$$

Exemple 13 (Cas d'une forme linéaire) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C} = (1_\mathbb{K})$ une (LA) base de $\mathbb{K}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u)$.

Alors, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_\mathcal{C}^\mathcal{C} = \mathrm{I}_1 = (1)$ puis

$$\mathrm{A}' = \mathrm{AP} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Corollaire 8.1 (Cas d'un endomorphisme) :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

Alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Posons $\mathrm{Y}' = \mathrm{A}'\mathrm{X}'$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. On a alors $\mathrm{Y}' = \mathrm{A}'\mathrm{X}' = (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\underbrace{\mathrm{P})(\mathrm{P}^{-1}}_{=\mathrm{I}_n}\mathrm{X}) = \mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AX}) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}$ et on retrouve $\mathrm{Y} = \mathrm{PY}'$. La proposition (7) est cohérente.

Vocabulaire : On dit alors que les matrices A et A′ sont *semblables*.

On pourra vérifier que la relation de similitude est également une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices carrées $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10 : On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2\,;\varepsilon_3)$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varepsilon_1 = (-1\,;2\,;0)\,,\ \varepsilon_2 = (1\,;-1\,;0)\ \text{ et } \varepsilon_3 = (-2\,;3\,;1)\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déterminer P et P^{-1}.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (-3x-2y-4z\,;4x+3y+5z\,;2z) \end{array}$

   Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

IV/ Noyau, image et rang d'une matrice

IV.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Rappel 1 : Soit $(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle *application linéaire canoniquement associée à* A l'application $u_{\mathrm{A}} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ définie par :

$$u_{\mathrm{A}} : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p \simeq \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \simeq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array} \quad \text{où} \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Quel est l'intérêt de cette application ?

Notons $\mathcal{E} = (\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ écrite entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

Par définition,

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u_{\mathrm{A}}) &= \Big(u_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_1) \cdots u_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_p)\Big)_{\mathcal{B}} = \Big(\mathrm{AE}_1 \cdots \mathrm{AE}_p\Big)_{\mathcal{B}} \\ &= \Big(\mathrm{C}_1 \cdots \mathrm{C}_p\Big)_{\mathcal{B}} = \mathrm{A}. \end{aligned}$$

Moralité : $\forall\, \mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de u_{A} coïncide avec A.

Exercice 11 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer u_{A}.

IV.2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 5 : Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et u_{A} l'application canoniquement associée à A.

— On appelle *noyau de* A, et on note $\ker(\mathrm{A})$, le noyau de u_{A} :
$$\ker(\mathrm{A}) = \ker(u_{\mathrm{A}}).$$

— On appelle *image de* A, et on note $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$, l'image de u_{A} :
$$\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}(u_{\mathrm{A}}).$$

— On appelle *rang de* A, et on note $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$, le rang de u_{A} :
$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(u_{\mathrm{A}}).$$

Remarques :

— Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $X = (x_1\,;\dots;x_p)$.

$$X \in \ker(A) \iff AX = (0)_{n,1} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{1,i}\,x_i & = & 0 \\ & = & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{n,i}\,x_i & = & 0 \end{array}\right.$$

Les lignes d'une matrice donnent un système d'équations de son noyau.

Exemple 14 (Noyau d'une matrice) : Le noyau d'une matrice se lit souvent bien sur ses coefficients.

Notons par exemple A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes.

Assurez-vous que vous comprenez parfaitement les observations suivantes :

— D'abord, $C_3 = C_1 + C_2$, donc $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, et on a :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

— De même, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$.

Exemple 15 : La dérivation polynomiale $D : P \longmapsto P'$ sur $\mathbb{K}[X]$ a pour noyau $\ker(D) = \mathbb{K}_0[X]$.

Exemple 16 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y - z, x - y) \end{array}$

Alors,

$$\ker(f) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

En effet, il est déjà clair que $C_1 + C_2 - 3C_3 = 0$. En résolvant le système $f(x) = 0$, on a aussi :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} 2x + y - z & = 0 \\ x - y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 3x \end{cases}$$

Enfin, $\ker(f) = \operatorname{vect}((1\,;1\,;3)) = \left\{(x, x, 3x) \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

— Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Par définition du rang d'une matrice, on a :

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(u_A) = \operatorname{vect}(u_A(e_1), \dots, u_A(e_n)) = \operatorname{vect}(C_1, \dots, C_n).$$

Les colonnes d'une matrice engendrent son image.

En particulier,

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(u_A) = \operatorname{rg}(u_A(e_1), \dots, u_A(e_n)) = \operatorname{rg}(Ae_1, \dots, Ae_n) = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_n).$$

Pour ces raisons, l'image d'une matrice peut être calculée rapidement par des opérations élémentaires sur les COLONNES.

Exemple 17 (Image d'une matrice) :

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow 2C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow 4C_1 - C_3}}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Corollaire 8.2 :
Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée de ses vecteurs colonnes.

Exemple 18 : L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, -x + y, z) \end{array}$ est canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont clairement libres.

On en déduit que f est de rang 3 donc surjective, donc bijective. En somme, un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 9 :
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\operatorname{rg}(\mathrm{A}) \leqslant \min(p\,;n)$.
- $\dim \ker(\mathrm{A}) + \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = p$.
(Théorème du rang)

Exercice 12 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer :

1. $\ker(\mathrm{A})$.
2. $\operatorname{Im}(\mathrm{A})$ et $\operatorname{rg}(\mathrm{A})$.

IV.3 Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 10 :

$$\mathrm{A} \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K}) \iff \ker(\mathrm{A}) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(\mathrm{A}) = \mathbb{K}^n \iff \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = n$$

IV.4 Invariance du rang

Proposition 11 :
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $\mathrm{P} \in \mathscr{G}l_p(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(\mathrm{AP}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$.
2. Si $\mathrm{Q} \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(\mathrm{QA}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$.

Corollaire 11.1 :
Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

$$\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{A} \sim_{\mathscr{L}} \mathrm{B} \text{ ou } \mathrm{A} \sim_{\mathscr{C}} \mathrm{B} \implies \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = \operatorname{rg}(\mathrm{B}).$$

Autrement dit, le rang d'une matrice est invariant lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont donc le même rang.

Théorème 12 (Rang de la transposée) :
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :
$$\operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg}(A).$$

Corollaire 12.1 :
Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée de ses vecteurs lignes.

Exemple 19 : Revenons sur la matrice de Vandermonde de l' exemple (10) :
$$M(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On a montré à l' exemple (10) qu'elle était inversible si les a_i étaient deux à deux distincts. Montrons la réciproque.

En effet, s'il existe deux indices distincts i et j de $[\![0\,;n]\!]$ tels que $a_i = a_j$ alors les lignes L_i et L_j sont identiques et $\operatorname{rg}(A) \leqslant n < n+1$.

En particulier $M(a_0, \dots, a_n)$ n'est pas inversible.

Par la contraposée on a donc montré que si $M(a_0, \dots, a_n)$ est inversible alors a_0, a_1, ..., a_n sont deux à deux distincts. C'est donc une équivalence.

Remarque : Nous verrons au prochain chapitre d'algèbre linéaire comment retrouver ce résultat d'une autre manière.

Exercice 13 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de A, montrer que $\ker(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.