Matrices et applications linéaires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 30

Sommaire I

La Matrice est universelle. Elle est omniprésente.

Elle est avec nous ici, en ce moment même. Tu la vois chaque fois que tu regardes par la fenêtre, ou lorsque tu allumes la télévision.

Morpheus

Il est temps pour cet avant-dernier chapitre d'algèbre linéaire de l'année de faire le lien entre les espaces vectoriels et le calcul matriciel, qui constitue un puissant outil d'étude, notamment pour les applications linéaires.

À tel point d'ailleurs qu'une grande partie de votre programme d'algèbre de deuxième année sera consacrée à la diagonalisation de matrices et à ses applications. Pour cette année, nous nous contenterons de constater qu'une application linéaire entre espaces de dimension finie peut être représentée par une matrice, et que le calcul matriciel (puissances de matrices notamment) s'interprète simplement dans ce cadre.

Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ étant caractérisée par les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ou encore par les coordonnées de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on peut tout savoir d'une application linéaire en connaissant simplement n fois p coordonnées.

C'est ce qui va permettre de créer un lien entre applications linéaires et matrices, et de justifier l'introduction du calcul matriciel effectuée dans un précédent chapitre, toutes les opérations sur les matrices s'interprétant naturellement en termes d'applications linéaires. Tout sera dit au théorème (2).

Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ étant caractérisée par les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ou encore par les coordonnées de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on peut tout savoir d'une application linéaire en connaissant simplement n fois p coordonnées.

C'est ce qui va permettre de créer un lien entre applications linéaires et matrices, et de justifier l'introduction du calcul matriciel effectuée dans un précédent chapitre, toutes les opérations sur les matrices s'interprétant naturellement en termes d'applications linéaires. Tout sera dit au théorème (2).

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **finie**.

I. Représentations matricielles

Définition 1 :

Soient E et un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathrm{E}$, un vecteur de E.

On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

I. Représentations matricielles

1. Matrice d'un vecteur

Définition 1 :

Soient E et un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathrm{E}$, un vecteur de E.

On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

ATTENTION Les matrices dépendent de la base $\mathcal{B}$ choisie.

En pratique, on identifiera souvent une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ au n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de ses éléments dans $\mathbb{K}^n$.

I. Représentations matricielles

1. Matrice d'un vecteur

En pratique, on identifiera souvent une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ au n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de ses éléments dans $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1 :

Dans l'espace des vecteurs $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si on considère $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'une manière générale, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, pour tout vecteur $u\,(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

I. Représentations matricielles

1. Matrice d'un vecteur

Proposition 1 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E.

Alors, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{\mathcal{B}} : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}_5[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, \dots, X^5)$, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\Big((X+1)^5\Big)$.

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}_5[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, \dots, X^5)$, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\Big((X+1)^5\Big)$.

Même question dans la base de Taylor centrée en -1 : $(1, X+1, (X+1)^2, \dots, (X+1)^5)$.

Définition 2 :

Soient E et un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ une famille de vecteurs de E.

On appelle matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Définition 2 :

Soient E et un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ une famille de vecteurs de E.

On appelle matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall\, j \in [\![1, p]\!],\ u_j = a_{1,j} e_1 + \cdots + a_{n,j} e_n.$$

Exemples 2 :

- Dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, si on considère $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ et $\overrightarrow{w} = 4\vec{i}$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \overrightarrow{w} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{array}$$

Exemples 2 :

- Dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, si on considère $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{w} = 4\vec{i}$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{array}$$

- Dans $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, si on considère $\vec{u} = (1\,;2\,;3)$ et $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemples 2 :

- Dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, si on considère $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{w} = 4\vec{i}$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{matrix} \end{array}$$

- Dans $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, si on considère $\vec{u} = (1\,;2\,;3)$ et $\vec{v} = (2\,;0\,;1)$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\mathcal{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathrm{I}_n$.

Exercice 2 :

Écrire la matrice des polynômes $\mathrm{P}_i(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+a)^i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ puis dans celle de Taylor centrée en $-a$.

Définition 3 :

Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- E de dimension p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$.
- F de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$, la matrice de la famille $\big(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)\big)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)\big)\\ &= \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).\end{aligned}$$

$$\forall\, j \in [\![1, p]\!], \quad u(e_j) = m_{1,j} f_1 + m_{2,j} f_2 + \cdots + m_{n,j} f_n.$$

Commentaires :

- Comprenez bien que pour remplir la matrice, on a calculé les images $u(e_1)$, $u(e_2)$, ..., $u(e_p)$ des éléments de la base $\mathscr{B}$ de E et que l'on a décomposé chacune d'elle dans la base $\mathscr{B}'$ de F (disposé en colonne dans la matrice).

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & & u(e_p) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array}
\end{array}$$

Commentaires :

- Comprenez bien que pour remplir la matrice, on a calculé les images $u(e_1)$, $u(e_2)$, ..., $u(e_p)$ des éléments de la base $\mathscr{B}$ de E et que l'on a décomposé chacune d'elle dans la base $\mathscr{B}'$ de F (disposé en colonne dans la matrice).

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & & u(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$$

- $\dim(\mathrm{E})$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(\mathrm{F})$ = nombre de lignes de la matrice.

Commentaires :

- Comprenez bien que pour remplir la matrice, on a calculé les images $u(e_1)$, $u(e_2)$, ..., $u(e_p)$ des éléments de la base $\mathcal{B}$ de E et que l'on a décomposé chacune d'elle dans la base $\mathcal{B}'$ de F (disposé en colonne dans la matrice).

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & & u(e_p) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array}
\end{array}$$

- $\dim(\mathrm{E})$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(\mathrm{F})$ = nombre de lignes de la matrice.
- Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$. C'est une matrice carrée.

Commentaires :

- Comprenez bien que pour remplir la matrice, on a calculé les images $u(e_1)$, $u(e_2)$, ..., $u(e_p)$ des éléments de la base $\mathcal{B}$ de E et que l'on a décomposé chacune d'elle dans la base $\mathcal{B}'$ de F (disposé en colonne dans la matrice).

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & & u(e_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array}
\end{array}$$

- $\dim(\mathrm{E})$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(\mathrm{F})$ = nombre de lignes de la matrice.
- Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$. C'est une matrice carrée.
- Si u est une forme linéaire ($\mathrm{F} = \mathbb{K}$), on a $n = 1$. La matrice de u est une matrice ligne, élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 3 :

Écrire « Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique » signifie alors que :

$$f(1) = 3X + 1, \quad f(X) = 4X^2 + X \quad \text{et} \quad f\left(X^2\right) = 5X^2 + 4X + 2.$$

Exemple 3 :

Écrire « Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique » signifie alors que :

$$f(1) = 3X + 1, \quad f(X) = 4X^2 + X \quad \text{et} \quad f\left(X^2\right) = 5X^2 + 4X + 2.$$

ATTENTION

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de $aX^2 + bX + c$ sont $(c\,;b\,;a)$!

Exercice 3 :

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $f_A : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, donner sans calcul, $f_A(1,0,0)$, $f_A(0,1,0)$ et $f_A(0,0,1)$ et calculer $f_A(1,2,3)$ et $f_A(-1,3,2)$ en utilisant les colonnes de A.

Exemple 4 :

Pour tout $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = \mathrm{I}_n$.

Exemple 4 :

Pour tout $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = \mathrm{I}_n$.

Exemple 5 (Forme linéaire) :

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$ une forme linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On prend $(1_{\mathbb{K}})$ pour base de $\mathbb{K}$.

En notant, $\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, $a_j = \varphi(e_j)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 6 :

1. Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y)_{\mathcal{B}} & \longmapsto & (x+y, 2x-y, 3y)_{\mathcal{B}'} \end{array}$ où $\begin{cases} \mathcal{B} = (e_1, e_2) \\ \mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3) \end{cases}$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

   On a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u(e_1) = u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 1f_1 + 2f_2 + 0f_3 \\ \\ \bullet\ u(e_2) = u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 1f_1 - 1f_2 + 3f_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Exemple 6 :

1. Soit $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y)_{\mathcal{B}} & \longmapsto & (x+y, 2x-y, 3y)_{\mathcal{B}'} \end{array}$ où $\begin{cases} \mathcal{B} = (e_1, e_2) \\ \mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3) \end{cases}$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\mathcal{C} = \left(e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = e_1 + 2e_2 \,;\, e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -e_1 + e_2 \right)$.

   Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u(e_1') = u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ \\ \bullet\ u(e_2') = u\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}.$$

Exemple 6 :

3. Soit $\mathcal{C}' = (f_1' = f_1 + f_2\,;\, f_2' = f_2 - f_3\,;\, f_3' = f_3)$.
   Alors :

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet\ u(e_1) = 1f_1 + 2f_2 + 0f_3 &&= \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\\
&\qquad = f_1 + f_2 + f_2 - f_3 + f_3 &&\\
&\qquad = f_1' + f_2' + f_3' &&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{C}'}\\
&\bullet\ u(e_2) = 1f_1 - 1f_2 + 3f_3 &&= \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\\
&\qquad = f_1' - 2f_2' + f_3' &&= \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{C}'}
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}.$$

Exemple 6 :

4. Enfin,

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet\ u(e_1') = 3f_1 + 6f_3 && = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
& = 3f_1' - 3f_2' + 3f_3' && = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}'} \\
&\bullet\ u(e_2') = -3f_2 + 3f_3 && = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\
& = -3f_2' && = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}'}
\end{aligned}\right\} \implies \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}.$$

Exemple 6 :

La matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies au départ ET à l'arrivée !

Exercice 4 :

On définit l'application $u : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y)$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$.

Exercice 4 :

On définit l'application $u : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y)$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$.
2. On considère $e'_1 = (1, 0, 0)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 1)$.
   Justifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, \epsilon'_2, e'_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}(u)$.

Exercice 4 :

On définit l'application $u : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - y)$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$.
2. On considère $e'_1 = (1, 0, 0)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 1)$.
   Justifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, \epsilon'_2, e'_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}(u)$.
3. On pose $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$ avec $f'_1 = (1, 1)$ et $f'_2 = (1, -1)$.
   En admettant que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$, déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}}(u)$.
   Expliquer pourquoi les calculs sont plus compliqués quand on choisit une autre base que la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 7 (Projecteur et symétrie) :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (e_1, \dots, e_r)$, $\mathcal{B}_{\mathrm{G}} = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ des bases respectives de F et G.

Notons $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\mathrm{F}} ; \mathcal{B}_{\mathrm{G}})$ une base de E adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

- Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Exemple 7 (Projecteur et symétrie) :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (e_1, \dots, e_r)$, $\mathcal{B}_{\mathrm{G}} = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ des bases respectives de F et G.

Notons $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\mathrm{F}}\,;\mathcal{B}_{\mathrm{G}})$ une base de E adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

- Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

- Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -\mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Exemple 7 (Projecteur et symétrie) :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (e_1, \dots, e_r)$, $\mathcal{B}_{\mathrm{G}} = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ des bases respectives de F et G.

Notons $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\mathrm{F}} ; \mathcal{B}_{\mathrm{G}})$ une base de E adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

- Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

- Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -\mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Remarque : Dans la base $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_{\mathrm{G}} ; \mathcal{B}_{\mathrm{F}})$ ces endomorphismes ont pour matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & \mathrm{I}_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & \mathrm{I}_r \end{pmatrix}.$$

Théorème 2 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;

Théorème 2 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

Théorème 2 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

Alors l'application $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$ est un isomorphisme.

Théorème 2 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

Alors l'application $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$ est un isomorphisme.

En particulier, la linéarité de $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ s'écrit notamment sous la forme :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, u,\ v \in \mathcal{L}\left(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\right),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v).$$

À retenir :

Ce théorème signifie que :

Unicité de la matrice associée :

$$\forall\, f \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,,\ \exists\,!\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

À retenir :

Ce théorème signifie que :

Unicité de la matrice associée :

$$\forall\, f \in \mathcal{L}\left(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\right),\ \exists !\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Unicité de l'application linéaire associée :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \exists !f \in \mathcal{L}\left(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\right) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

À retenir :

Ce théorème signifie que :

Unicité de la matrice associée :

$$\forall\, f \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,,\ \exists!\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Unicité de l'application linéaire associée :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \exists\, !f \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

On pourra ainsi (souvent) raisonner indifféremment sur les matrices ou sur les applications linéaires.

À retenir :

Ce théorème signifie que :

Unicité de la matrice associée :

$$\forall\, f \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,,\ \exists!\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Unicité de l'application linéaire associée :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \exists!f \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \text{ tel que } \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

On pourra ainsi (souvent) raisonner indifféremment sur les matrices ou sur les applications linéaires.

ATTENTION

Cette isomorphisme est non canonique *i.e.* il dépend des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ choisies.

L'isomorphisme de $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ nous permet de redémontrer un résultat connu :

Corollaire 1 :

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ aussi et on a :

$$\dim(\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F})\,.$$

II. Matrice(S) d'une application linéaire

Exercice 5 (Introduction) :

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ sont respectivement des bases de E et F.

Soit $x = 10e_1 - 7e_2$. Déterminer $u(x)$.

Théorème 3 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie respectivement rapportés aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\Big(u(x)\Big) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) & \times & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \\ \mathrm{Y} & = & \mathrm{A} & \times & \mathrm{X}. \end{array}$$

Où $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\Big(u(x)\Big)$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ et $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

II. Matrice(S) d'une application linéaire

1. Image d'un vecteur par une application linéaire

Théorème 3 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie respectivement rapportés aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\Big(u(x)\Big) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) & \times & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \\ \mathrm{Y} & = & \mathrm{A} & \times & \mathrm{X}. \end{array}$$

Où $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\Big(u(x)\Big)$, $\quad \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ et $\quad \mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

La relation $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ est une généralisation de la fonction linéaire $y = ax$ en dimension 1.

Exemple 8 :

Reprenons l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y)_{\mathcal{B}} & \longmapsto & (x+y, 2x-y, 3y)_{\mathcal{B}'} \end{array}$ de l' exemple (6) où

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On peut calculer l'image de $(5\,;-2)$ de deux manières maintenant :

1. $u(\,(5\,;-2)\,) = (3\,;12\,;-6)$.

Exemple 8 :

Reprenons l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y)_{\mathcal{B}} & \longmapsto & (x+y, 2x-y, 3y)_{\mathcal{B}'} \end{array}$ de l' exemple (6) où

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On peut calculer l'image de $(5\,;-2)$ de deux manières maintenant :

1. $u(\,(5\,;-2)\,) = (3\,;12\,;-6)$.
2. $u(\,(5\,;-2)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

À retenir :

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice alors sa $j^{\text{ème}}$ colonne C_j s'obtient par le produit matriciel $\mathrm{C}_j = \mathrm{A} \cdot \mathrm{E}_j$ où E_j la $j^{\text{ème}}$ matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

À retenir :

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice alors sa $j^{\text{ème}}$ colonne C_j s'obtient par le produit matriciel $\mathrm{C}_j = \mathrm{A} \cdot \mathrm{E}_j$ où E_j la $j^{\text{ème}}$ matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 9 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{E}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{C}_2}$$

Exercice 6 (Introduction) :

On munit respectivement $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ des bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, et $\mathcal{D} = (g_1, g_2)$.

On considère :

- $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3 ; \mathbb{R}^4\right)$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- $v \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4 ; \mathbb{R}^2\right)$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u)$.

Théorème 4 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension q muni d'une base $\mathcal{C}$;
- G un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{D}$.

On considère deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Théorème 4 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$;
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension q muni d'une base $\mathcal{C}$;
- G un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{D}$.

On considère deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).$$

Corollaire 2 :

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathcal{B}$ une base de E de dimension finie n et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Alors,

- u est un projecteur si, et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

Corollaire 2 :

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathcal{B}$ une base de E de dimension finie n et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Alors,

- u est un projecteur si, et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.
- u est une symétrie si, et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$.

Corollaire 2 :

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathcal{B}$ une base de E de dimension finie n et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Alors,

- u est un projecteur si, et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.
- u est une symétrie si, et seulement si $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$.

Exercice 7 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x\,;y) = (3x + 6y\,; -x - 2y)$.

Écrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et en déduire que f est un projecteur.

Théorème 5 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

On considère $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Théorème 5 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

On considère $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

$$u \text{ est un isomorphisme} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \text{ est inversible.}$$

Théorème 5 :

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
- F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$.

On considère $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

$$u \text{ est un isomorphisme} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\Big)^{-1}.$$

Exercice 8 :

Soit f l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ (a\,;b\,;c) & \longmapsto & a+b+b\mathrm{X}+(b+c)\mathrm{X}^2. \end{array}$$

Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Corollaire 3 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ une famille d'éléments de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \text{ est inversible } \iff (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de E.}$$

Corollaire 3 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ une famille d'éléments de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \text{ est inversible } \iff (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de E.}$$

Autrement dit, une matrice carrée est inversible si, et seulement si les vecteurs formés par ses colonnes forment une base de E.

Exemple 10 (Matrice de Vandermonde) :

Soient a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ les polynômes de Lagrange associés.

On rappelle que, dans les cas où les a_i sont distincts, $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et que tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ se décompose donc de manière unique dans cette base sous la forme :

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(a_0)\mathrm{L}_0 + \mathrm{P}(a_1)\mathrm{L}_1 + \dots + \mathrm{P}(a_n)\mathrm{L}_n.$$

Exemple 10 (Matrice de Vandermonde) :

Soient a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, $(L_0, \dots, L_n)$ les polynômes de Lagrange associés.

On rappelle que, dans les cas où les a_i sont distincts, $(L_0, \dots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et que tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ se décompose donc de manière unique dans cette base sous la forme :

$$P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + \dots + P(a_n)L_n.$$

La matrice de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes de Lagrange est donc :

$$M(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Exemple 10 (Matrice de Vandermonde) :

Soient a_0, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts, $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ les polynômes de Lagrange associés.

On rappelle que, dans les cas où les a_i sont distincts, $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et que tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ se décompose donc de manière unique dans cette base sous la forme :

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(a_0)\mathrm{L}_0 + \mathrm{P}(a_1)\mathrm{L}_1 + \dots + \mathrm{P}(a_n)\mathrm{L}_n.$$

La matrice de la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ dans la base $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ des polynômes de Lagrange est donc :

$$\mathrm{M}(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que si a_0, a_1, ..., a_n sont deux à deux distincts alors la matrice

$\mathrm{M}(a_0, \dots, a_n)$ est inversible.

Définition 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E.

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

III. Changement de bases

1. Matrice de passage

Exemple II :

1. Dans le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

   La famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ forme une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple II :

1. Dans le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

   La famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ forme une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_2$, la matrice de passage de la base canonique $(e_1\,; e_2)$ à la base $(u(\theta); v(\theta))$ où $u(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et $v(\theta) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$ est :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

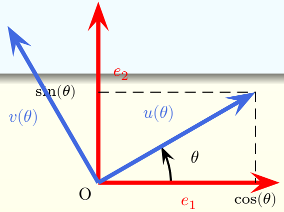

Figure 1 – La matrice de passage $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de la base $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2)$ à la base $\mathcal{B}_\theta = (u(\theta)\,; v(\theta))$ est une matrice de rotation.

Exercice 9 :

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ où $\begin{cases} e_1 & = (1\,;0) \\ e_2 & = (1\,;1) \end{cases}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 & = (-1\,;1) \\ \varepsilon_2 & = (0\,;1) \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 :

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ où $\begin{cases} e_1 & = (1\,;0) \\ e_2 & = (1\,;1) \end{cases}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 & = (-1\,;1) \\ \varepsilon_2 & = (0\,;1) \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Exercice 9 :

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ où $\begin{cases} e_1 & = (1\,;0) \\ e_2 & = (1\,;1) \end{cases}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 & = (-1\,;1) \\ \varepsilon_2 & = (0\,;1) \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
3. Vérifier que $\mathrm{PQ} = \mathrm{QP} = \mathrm{I}_2$.

Tout d'abord quelques propriétés qui découlent de la définition :

Proposition 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On considère $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases de E. Alors :

1. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.

Tout d'abord quelques propriétés qui découlent de la définition :

Proposition 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On considère $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases de E. Alors :

1. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.
2. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{I}_n$.

ATTENTION à l'ordre des bases dans $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$!

Tout d'abord quelques propriétés qui découlent de la définition :

Proposition 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On considère $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases de E. Alors :

1. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.
2. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{I}_n$.
3. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

ATTENTION à l'ordre des bases dans $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$!

Tout d'abord quelques propriétés qui découlent de la définition :

Proposition 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On considère $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases de E. Alors :

1. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.
2. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{I}_n$.
3. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.
4. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

ATTENTION à l'ordre des bases dans $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$!

Exemple 12 :

En reprenant les exemples précédents :

1. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où, } \begin{cases} \vec{i} &= \dfrac{2}{7}\vec{u} - \dfrac{1}{7}\vec{v} \\ \vec{j} &= \dfrac{1}{7}\vec{u} + \dfrac{3}{7}\vec{v} \end{cases}$$

Exemple 12 :

En reprenant les exemples précédents :

1. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$\text{D'où, } \begin{cases} \vec{i} & = \dfrac{2}{7}\vec{u} - \dfrac{1}{7}\vec{v} \\ \vec{j} & = \dfrac{1}{7}\vec{u} + \dfrac{3}{7}\vec{v} \end{cases}$$

2. $\mathrm{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

$$\text{D'où, } \begin{cases} e_1 & = \cos(\theta)u(\theta) + \sin(\theta)v(\theta) \\ e_2 & = -\sin(\theta)u(\theta) + \cos(\theta)v(\theta) \end{cases}$$

III. Changement de bases

2. Formules de changement de bases

Dans une soirée, une matrice propose à une matrice inversible de danser avec elle :

Ah non, désolée je ne reste pas, je suis de passage !

Proposition 7 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On note $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ les matrices respectives des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Alors :

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'.$$

III. Changement de bases
2. Formules de changement de bases

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E},\mathcal{B} & \xrightarrow[\mathrm{P}^{-1}]{\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}} & \mathrm{E},\mathcal{B}' \\ \mathrm{X} & & \mathrm{X}' \end{array}$$

Remarque : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donne les anciennes coordonnées (dans $\mathcal{B}$) en fonction des nouvelles (dans $\mathcal{B}'$) ! Si l'on veut les nouvelles en fonction des anciennes, il faut inverser la matrice de passage : $\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$.

III. Changement de bases

2. Formules de changement de bases

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}, \mathcal{B} & \xrightarrow[\mathrm{P}^{-1}]{\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}} & \mathrm{E}, \mathcal{B}' \\ \mathrm{X} & & \mathrm{X}' \end{array}$$

Remarque : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donne les anciennes coordonnées (dans $\mathcal{B}$) en fonction des nouvelles (dans $\mathcal{B}'$) ! Si l'on veut les nouvelles en fonction des anciennes, il faut inverser la matrice de passage : $\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$.

Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, on vérifiera que l'on a encore :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{P}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}).$$

Théorème 8 :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

Théorème 8 :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}, \mathcal{B} \arrow[r, "u", "\mathrm{A}"'] & \mathrm{F}, \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "\mathrm{Q}^{-1}"'] \\
\mathrm{E}, \mathcal{B}' \arrow[u, "\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}", "\mathrm{P}"'] \arrow[r, "u", "\mathrm{A}'"'] & \mathrm{F}, \mathcal{C}' \arrow[u, "\mathrm{Q}", "\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}"']
\end{tikzcd}$$

Théorème 8 :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E},\mathcal{B} \arrow[r, "u", "\mathrm{A}"'] & \mathrm{F},\mathcal{C} \arrow[d, bend right=40, "\mathrm{Q}^{-1}"'] \\
\mathrm{E},\mathcal{B}' \arrow[u, "\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}", "\mathrm{P}"'] \arrow[r, "u", "\mathrm{A}'"'] & \mathrm{F},\mathcal{C}' \arrow[u, "\mathrm{Q}", "\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}"']
\end{tikzcd}$$

Vocabulaire : On dit alors que les matrices A et A′ sont équivalentes.

Exemple 13 (Cas d'une forme linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C} = (1_{\mathbb{K}})$ une (LA) base de $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u)$.

Alors, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \mathrm{I}_1 = (1)$ puis

$$\mathrm{A}' = \mathrm{AP} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Corollaire 4 (Cas d'un endomorphisme) :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

Alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

Corollaire 4 (Cas d'un endomorphisme) :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Notons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

Alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Vocabulaire : On dit alors que les matrices A et A′ sont semblables.

Exercice 10 :

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1\,; \varepsilon_2\,; \varepsilon_3)$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varepsilon_1 = (-1\,;2\,;0)\,,\ \varepsilon_2 = (1\,;-1\,;0)\ \text{ et } \varepsilon_3 = (-2\,;3\,;1)\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 :

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1\,; \varepsilon_2\,; \varepsilon_3)$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varepsilon_1 = (-1\,;2\,;0)\,,\ \varepsilon_2 = (1\,;-1\,;0)\ \text{ et } \varepsilon_3 = (-2\,;3\,;1)\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déterminer P et P^{-1}.

Exercice 10 :

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2\,;\varepsilon_3)$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varepsilon_1 = (-1\,;2\,;0)\,,\ \varepsilon_2 = (1\,;-1\,;0)\ \text{ et } \varepsilon_3 = (-2\,;3\,;1)\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déterminer P et P^{-1}.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (-3x-2y-4z\,;4x+3y+5z\,;2z) \end{array}$$

   Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

IV. Noyau, image et rang d'une matrice

Rappel :

Soit $(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle application linéaire canoniquement associée à A l'application $u_{\mathrm{A}} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ définie par :

$$u_{\mathrm{A}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p \simeq \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array} \quad \text{où} \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Quel est l'intérêt de cette application ?

Quel est l'intérêt de cette application ?

Notons $\mathcal{E} = (\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ écrite entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

Par définition,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u_{\mathrm{A}}) &= \Big(u_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_1)\cdots u_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_p)\Big)_{\mathcal{B}} = \Big(\mathrm{AE}_1 \cdots \mathrm{AE}_p\Big)_{\mathcal{B}} \\ &= \Big(\mathrm{C}_1 \cdots \mathrm{C}_p\Big)_{\mathcal{B}} = \mathrm{A}.\end{aligned}$$

Quel est l'intérêt de cette application ?

Notons $\mathcal{E} = (\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ écrite entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

Par définition,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u_\mathrm{A}) &= \Big(u_\mathrm{A}(\mathrm{E}_1) \cdots u_\mathrm{A}(\mathrm{E}_p)\Big)_{\mathcal{B}} = \Big(\mathrm{AE}_1 \cdots \mathrm{AE}_p\Big)_{\mathcal{B}} \\ &= \Big(\mathrm{C}_1 \cdots \mathrm{C}_p\Big)_{\mathcal{B}} = \mathrm{A}.\end{aligned}$$

Moralité : $\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de u_A coïncide avec A.

Exercice 11 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer u_A.

Définition 5 :

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et u_{A} l'application canoniquement associée à A.

- On appelle noyau de A, et on note $\ker(\mathrm{A})$, le noyau de u_{A} :

$$\ker(\mathrm{A}) = \ker(u_{\mathrm{A}}).$$

Définition 5 :

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et u_{A} l'application canoniquement associée à A.

- On appelle **noyau de A**, et on note $\ker(\mathrm{A})$, le noyau de u_{A} :

$$\ker(\mathrm{A}) = \ker(u_{\mathrm{A}}).$$

- On appelle **image de A**, et on note $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$, l'image de u_{A} :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}(u_{\mathrm{A}}).$$

Définition 5 :

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et u_{A} l'application canoniquement associée à A.

- On appelle **noyau de A**, et on note $\ker(\mathrm{A})$, le noyau de u_{A} :

$$\ker(\mathrm{A}) = \ker(u_{\mathrm{A}}).$$

- On appelle **image de A**, et on note $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$, l'image de u_{A} :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}(u_{\mathrm{A}}).$$

- On appelle **rang de A**, et on note $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$, le rang de u_{A} :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(u_{\mathrm{A}}).$$

Remarques :

- Notons $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\mathrm{X} = \left(x_1\,;\ldots;x_p\right)$.

$$\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{A}) \iff \mathrm{AX} = (0)_{n,1} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{1,i}\,x_i & = & 0 \\ & = & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{n,i}\,x_i & = & 0 \end{array}\right.$$

Les lignes d'une matrice donnent un système d'équations de son noyau.

Exemple 14 (Noyau d'une matrice) :

Le noyau d'une matrice se lit souvent bien sur ses coefficients.

Notons par exemple A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes.

Assurez-vous que vous comprenez parfaitement les observations suivantes :

- D'abord, $C_3 = C_1 + C_2$, donc $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, et on a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; i.e. \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

Exemple 14 (Noyau d'une matrice) :

Le noyau d'une matrice se lit souvent bien sur ses coefficients.

Notons par exemple A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes.

Assurez-vous que vous comprenez parfaitement les observations suivantes :

- D'abord, $C_3 = C_1 + C_2$, donc $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, et on a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; i.e. \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

- De même, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$.

Exemple 15 :

La dérivation polynomiale $\mathrm{D} : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'$ sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ a pour noyau $\ker(\mathrm{D}) = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}]$.

Exemple 16 :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y - z, x - y) \end{array}$

Alors,

$$\ker(f) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Exemple 16 :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y - z, x - y) \end{array}$

Alors,

$$\ker(f) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

En effet, il est déjà clair que $C_1 + C_2 - 3C_3 = 0$.

Exemple 16 :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z, x-y) \end{array}$

Alors,

$$\ker(f) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

En effet, il est déjà clair que $C_1 + C_2 - 3C_3 = 0$. En résolvant le système $f(x) = 0$, on a aussi :

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2x+y-z & = 0 \\ x-y & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = x \\ z = 3x \end{array} \right.$$

Exemple 16 :

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z, x-y) \end{array}$

Alors,

$$\ker(f) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

En effet, il est déjà clair que $C_1 + C_2 - 3C_3 = 0$. En résolvant le système $f(x) = 0$, on a aussi :

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2x+y-z & = 0 \\ x-y & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = x \\ z = 3x \end{array} \right.$$

Enfin, $\ker(f) = \operatorname{vect}((1\,;1\,;3)) = \Big\{(x,x,3x) \,/\, x \in \mathbb{R}\Big\}$.

- Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et
  $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  Par définition du rang d'une matrice, on a :

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(u_A) = \operatorname{vect}(u_A(e_1), \dots, u_A(e_n)) = \operatorname{vect}(C_1, \dots, C_n).$$

Les colonnes d'une matrice engendrent son image.

- Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et
  $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  Par définition du rang d'une matrice, on a :

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(u_A) = \mathrm{vect}\,(u_A(e_1), \dots, u_A(e_n)) = \mathrm{vect}\,(C_1, \dots, C_n)\,.$$

Les colonnes d'une matrice engendrent son image.

En particulier,

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(u_A) = \mathrm{rg}\,(u_A(e_1), \dots, u_A(e_n)) = \mathrm{rg}\,(Ae_1, \dots, Ae_n) = \mathrm{rg}\,(C_1, \dots, C_n).$$

- Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_1 & \cdots & \mathrm{C}_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

  Par définition du rang d'une matrice, on a :

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}\,(u_\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\,(u_\mathrm{A}(e_1), \dots, u_\mathrm{A}(e_n)) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n)\,.$$

Les colonnes d'une matrice engendrent son image.

En particulier,

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(u_\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(u_\mathrm{A}(e_1), \dots, u_\mathrm{A}(e_n)) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}e_1, \dots, \mathrm{A}e_n) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n).$$

Pour ces raisons, l'image d'une matrice peut être calculée rapidement par des opérations élémentaires sur les COLONNES.

Exemple 17 (Image d'une matrice) :

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple 17 (Image d'une matrice) :

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow 2C_1-C_2\\ C_3\leftarrow 4C_1-C_3}}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple 17 (Image d'une matrice) :

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow 2C_1-C_2\\ C_3\leftarrow 4C_1-C_3}}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple 17 (Image d'une matrice) :

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow 2C_1-C_2\\ C_3\leftarrow 4C_1-C_3}}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{C_1\leftarrow C_1-C_2}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple 17 (Image d'une matrice) :

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow 2C_1-C_2\\ C_3\leftarrow 4C_1-C_3}}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{C_1\leftarrow C_1-C_2}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Corollaire 5 :

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée de ses vecteurs colonnes.

Corollaire 5 :

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée de ses vecteurs colonnes.

Exemple 18 :

L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, -x+y, z) \end{array}$ est canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont clairement libres.

Corollaire 5 :

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée de ses vecteurs colonnes.

Exemple 18 :

L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, -x+y, z) \end{array}$ est canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont clairement libres.

On en déduit que f est de rang 3 donc surjective, donc bijective. En somme, un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

- Le rang d'une matrice a déjà été défini : c'est le nombre de pivots d'une matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A. On verra que ces deux définitions sont cohérentes.

- Le rang d'une matrice a déjà été défini : c'est le nombre de pivots d'une matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A. On verra que ces deux définitions sont cohérentes.

Théorème 9 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leqslant \min\,(p\,;n)$.

- Le rang d'une matrice a déjà été défini : c'est le nombre de pivots d'une matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A. On verra que ces deux définitions sont cohérentes.

Théorème 9 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leqslant \min\,(p\,;n)$.
- $\dim\ker\,(\mathrm{A}) + \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = p$. (Théorème du rang)

Remarque : Le rang d'une matrice vaut donc $p - \dim\ker(\mathrm{A})$.

Remarque : Le rang d'une matrice vaut donc $p - \dim \ker(\mathrm{A})$.

Or, $\ker(\mathrm{A})$ est obtenu en résolvant le système $\mathrm{AX} = 0$.

Remarque : Le rang d'une matrice vaut donc $p - \dim \ker(\mathrm{A})$.

Or, $\ker(\mathrm{A})$ est obtenu en résolvant le système $\mathrm{AX} = 0$.

Si l'on note r le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A, on a vu qu'on avait r inconnues principales, donc $p - r$ degrés de liberté.

Remarque : Le rang d'une matrice vaut donc $p - \dim \ker(\mathrm{A})$.

Or, $\ker(\mathrm{A})$ est obtenu en résolvant le système $\mathrm{AX} = 0$.

Si l'on note r le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A, on a vu qu'on avait r inconnues principales, donc $p - r$ degrés de liberté.

Ainsi $\dim \ker(\mathrm{A}) = p - r$ et donc $p - \dim \ker(\mathrm{A}) = r$. La cohérence des deux définitions est assurée.

Exercice 12 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer :

1. $\ker(A)$.

Exercice 12 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer :

1. $\ker(A)$.
2. $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{rg}(A)$.

IV. Noyau, image et rang d'une matrice

3. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 10 :

$$\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}) \iff \ker(\mathrm{A}) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathbb{K}^n \iff \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$$

Proposition 11 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $\mathrm{P} \in \mathcal{G}l_p(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}\,(\mathrm{AP}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$.

Proposition 11 :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $P \in \mathcal{G}l_p(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(AP) = \operatorname{rg}(A)$.
2. Si $Q \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(QA) = \operatorname{rg}(A)$.

Les manipulations élémentaires sur les lignes ou les colonnes représentant le produit à gauche ou à droite par des matrices inversibles, on en déduit un résultat jadis admis :

Corollaire 6 :

Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

$$\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{A} \sim_{\mathcal{L}} \mathrm{B} \ \text{ ou } \ \mathrm{A} \sim_{\mathcal{C}} \mathrm{B} \implies \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{B}).$$

Les manipulations élémentaires sur les lignes ou les colonnes représentant le produit à gauche ou à droite par des matrices inversibles, on en déduit un résultat jadis admis :

Corollaire 6 :

Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

$$\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{A} \sim_{\mathcal{L}} \mathrm{B} \;\text{ ou }\; \mathrm{A} \sim_{\mathcal{C}} \mathrm{B} \implies \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{B}).$$

Autrement dit, le rang d'une matrice est invariant lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont donc le même rang.

Théorème 12 (Rang de la transposée) :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}).$$

IV. Noyau, image et rang d'une matrice

4. Invariance du rang

Théorème 12 (Rang de la transposée) :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}).$$

On obtient alors l'homologue du corollaire (5) :

Corollaire 7 :

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée de ses vecteurs lignes.

Exemple 19 :

Revenons sur la matrice de Vandermonde de l' exemple (10) :

$$\mathrm{M}(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On a montré à l' exemple (10) qu'elle était inversible si les a_i étaient deux à deux distincts. Montrons la réciproque.

Exemple 19 :

Revenons sur la matrice de Vandermonde de l' exemple (10) :

$$M(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On a montré à l' exemple (10) qu'elle était inversible si les a_i étaient deux à deux distincts. Montrons la réciproque.

En effet, s'il existe deux indices distincts i et j de $[\![0\,;n]\!]$ tels que $a_i = a_j$ alors les lignes L_i et L_j sont identiques et $\mathrm{rg}\,(A) \leqslant n < n+1$.

En particulier $M(a_0, \dots, a_n)$ n'est pas inversible.

Exemple 19 :

Revenons sur la matrice de Vandermonde de l' exemple (10) :

$$\mathrm{M}(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

On a montré à l' exemple (10) qu'elle était inversible si les a_i étaient deux à deux distincts. Montrons la réciproque.

En effet, s'il existe deux indices distincts i et j de $[\![0\,;n]\!]$ tels que $a_i = a_j$ alors les lignes L_i et L_j sont identiques et $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leqslant n < n+1$.

En particulier $\mathrm{M}(a_0, \dots, a_n)$ n'est pas inversible.

Par la contraposée on a donc montré que si $\mathrm{M}(a_0, \dots, a_n)$ est inversible alors a_0, a_1, ..., a_n sont deux à deux distincts. C'est donc une équivalence.

Exercice 13 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de A, montrer que

$\ker(A) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 13 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de A, montrer que

$$\ker(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } \mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$