Variables aléatoires

I/ Variables aléatoires, lois de probabilité

Exercice 1 : Après une séance de sport, Victor invite ses amis Riwan et Justine à un bar.

Riwan choisit une boisson au hasard parmi les boissons chaudes et Justine et Victor choisissent la même boisson au hasard parmi les boissons froides.

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au prix total payé par Victor.

Justifier qu'on peut écrire $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + 2\mathbb{X}_2$, où $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont deux variables qu'on interprétera.

Correction : En prenant $\mathbb{X}_1$ comme prix de la boisson chaude choisie par Riwan et $\mathbb{X}_2$ comme celui des boissons froides identiques choisies par Justine et Victor, le prix total payé par Victor s'élève donc bien à $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + 2\mathbb{X}_2$.

Exercice 2 : Une boîte contient des jetons rouges et des jetons jaunes indiscernables au toucher. Les jetons rouges correspondent à un gain de 3€ et les jetons jaunes à un gain de 2€.

On tire avec remise deux jetons de la boîte.

On note R l'événement « On a obtenu une boule rouge » et J l'événement « On a obtenu une boule jaune ».

On travaille avec $\Omega = \{R;\ J\}^2$.

On note $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ les variables aléatoires désignant les gains obtenus respectivement au 1^er^ et au 2^ème^ tirage.

1. Calculer les valeurs de $\mathbb{X}_2((R;R))$, $\mathbb{X}_1((R;J))$, $\mathbb{X}_2((R;J))$, $\mathbb{X}_1((J;R))$ et $\mathbb{X}_2((J;J))$.
2. Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au gain total obtenu à l'issue des deux étapes.

   Exprimer $\mathbb{X}$ en fonction de $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$.

Correction :

1. $\mathbb{X}_1$ correspond au gain du 1^er^ tirage et $\mathbb{X}_2$ à celui du 2^ème^ tirage.

   Ainsi, $\mathbb{X}_2((R;R)) = 3$, $\mathbb{X}_1((R;J)) = 3$, $\mathbb{X}_2((R;J)) = 2$, $\mathbb{X}_1((J;R)) = 2$ et $\mathbb{X}_2((J;J)) = 2$.
2. Le gain total est la somme des gains obtenus à chaque étape donc $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$.

Exercice 3 : On lance quatre fois une pièce bien équilibrée et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de séquences *Pile-Face* obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de $\mathbb{X}$.

Correction : L'univers et la variable aléatoire $\mathbb{X}$ sont donnés ci-dessous :

ω	$\mathbb{X}(\omega)$	ω	$\mathbb{X}(\omega)$	ω	$\mathbb{X}(\omega)$	ω	$\mathbb{X}(\omega)$
PPPP	0	PFPP	1	FPPP	0	FFPP	0
PPPF	1	PFPF	2	FPPF	1	FFPF	1
PPFP	1	PFFP	1	FPFP	1	FFFP	0
PPFF	1	PFFF	1	FPFF	1	FFFF	0

La loi de probabilité de $\mathbb{X}$ est donc donnée par :

x	0	1	2
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{10}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

Exercice 4 : Un lycée propose un tournoi interclasse de football dans lequel douze équipes s'affrontent.

L'équipe A rencontre l'intégralité des autres équipes et, à chaque match, sa probabilité de remporter le duel s'élève à 0,35.

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de matchs gagnés par l'équipe A.

Les résultats seront arrondis au millième si besoin.

1. Montrer que $\mathbb{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, $\mathrm{V}(\mathbb{X})$ et $\sigma(\mathbb{X})$.
3. Une victoire rapporte trois points. Une défaite ou un match nul rapporte 0 point. On note $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de points remportés par l'équipe A.

   Calculer $\mathrm{E}(\mathbb{Y})$, $\mathrm{V}(\mathbb{Y})$ et $\sigma(\mathbb{Y})$.

Exercice 5 : On lance un dé parfaitement équilibré au plus cinq fois. On s'arrête de le lancer dès qu'on a obtenu un 6. On note $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués. Déterminer sa loi.

Exercice 6 : Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit $\mathbb{X}$ le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de $\mathbb{X}$?

Exercice 7 : Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Calculer $P(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$ et $P(\mathbb{X} \geqslant \mathbb{Y})$.
2. Déterminer la loi de $D = \mathbb{X} - \mathbb{Y}$.

II/ Espérance, Variance

Exercice 8 : Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Correction :

1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \dfrac{3}{5}$.

   On obtient $P(A) = 1 - (\dfrac{2}{5})^4 = 0.9744$, $P(B) = \dbinom{4}{2}(\dfrac{2}{5})^2(\dfrac{3}{5})^2 = 0.3456$.
2. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \dfrac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \dfrac{12}{5}$.

Exercice 9 : Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20».

Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale)

Quelle est son espérance, son écart-type ?

Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Correction : Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20.

La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$.

Variables aléatoires

Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.25}$.

La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15} 0.75^{15} 0.25^5 = 0.202\,33$.

Exercice 10 : Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction : Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a 4^{20} grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\frac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire X, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20 : $\mathrm{P}[\mathrm{X} = k] = \mathrm{C}_{20}^{k} (\frac{1}{4})^k (1 - \frac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.

Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 5$

Exercice 11 : Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 5]$.

Correction :

1. 30% est la probabilité de l'événement Panne, noté $\mathrm{P}a$; la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans, d'être hors d'usage est
$$\mathrm{P(HU)} = \mathrm{P}(\mathrm{HU}/\mathrm{P}a)\mathrm{P}(\mathrm{P}a) + \mathrm{P}(\mathrm{HU}/non\mathrm{P}a)\mathrm{P}(non\mathrm{P}a) = 0,3 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,505.$$
2. La probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant est $\mathrm{P}(\text{non}\,\mathrm{P}a/\mathrm{HU}) = \mathrm{P}(\mathrm{HU}/\text{non}\,\mathrm{P}a)\mathrm{P}(\text{non}\,\mathrm{P}a)/\mathrm{P}(\mathrm{HU}) = 0,4 \cdot 0,7/0,505 = 0,554\,46$.
3. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, $n = 10$, $p = 0,3$, espérance 3.
4. $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 5] = \binom{10}{5} (0,3)^5 (0,7)^5 = 0,102\,92$

Exercice 12 : L'entreprise Luminex fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$.

1. Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?
3. Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?

Correction :

1. Une lampe tirée au hasard a une probabilité de $0,2$ d'avoir une durée de vie inférieure à 3000 heures. Le nombre X de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 tiré au hasard est la somme de 15 variables de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Par conséquent, il suit une loi binomiale $\mathrm{B}(15; 0,2)$. Son espérance vaut $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 15 \times 0,2 = 3$.
2. C'est $p(\mathrm{X} = 0) = \binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15} \sim 0,0352$.
3. C'est $p(\mathrm{X} = 0) + p(\mathrm{X} = 1) + p(\mathrm{X} = 2)$

$$\begin{aligned} &= \binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15} + \binom{15}{1}(0,2)^1(0,8)^{14} + \binom{15}{2}(0,2)^2(0,8)^{13} \\ &= 0,0352 + 0,1319 + 0,2309 \simeq 0,398. \end{aligned}$$

Exercice 13 : Un transporteur aérien a observé que 25% en moyenne des personnes ayant réservé un siège pour un vol ne se présentent pas au départ. Il décide d'accepter jusqu'à 23 réservations alors qu'il ne dispose que de 20 sièges pour ce vol.

1. Soit X la variable aléatoire "nombre de clients qui viennent après réservation quand 23 places ont été réservées". Quelle est la loi de X (précisez les hypothèses que vous faites pour modéliser la situation) ? Quelle est son espérance ?
2. Si 23 personnes ont réservé, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?

Correction :

1. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 23$, $p = 0,75$: $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{k}{n} p^k(1-p)^{n-k}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$. Son espérance est $np = 17,25$.
2. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 20) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \in \{21, 22, 23\}) \simeq 0,951$.

Exercice 14 : On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0,5 ?
3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0,4 et 0,6 (bornes incluses) ?

4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $\left[0,5 - \frac{a}{10}, 0,5 + \frac{a}{10}\right]$ soit supérieure à 95%.
5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

Correction :

1. $\mathrm{Y} \sim \mathcal{B}(10, 1/2)$, $\mathrm{X} = \mathrm{Y}/10$.
2. $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 0,5) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} > 5) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = 6,7,8,9,10) \simeq 0,377$.
3. $\mathrm{P}(0,4 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 0,6) = \mathrm{P}(4 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 6) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = 4,5,6) \simeq 0,656$
4. $\mathrm{P}(3 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 7) \simeq 0,891$. $\mathrm{P}(2 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 8) \simeq 0,978$. Donc $a = 3$.
5. Oui. Non.

Exercice 15 : Dans une dictature militaire, le dictateur veut augmenter le nombre de naissances de garçons. Il impose la règle suivante : si une femme donne naissance à une fille, elle doit continuer à faire des enfants ; si elle donne naissance à un garçon, elle doit arrêter d'avoir des enfants. On suppose que chaque femme a au moins un enfant et pas plus de 5 enfants.

1. Soit X le nombre de filles par femme. Quelle est la loi de X ?
2. Quel est le nombre moyen de filles d'une femme ? Le nombre moyen de garçons ? Cette règle est-elle efficace pour augmenter le nombre de garçons ?

Correction :

1. $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = 0,5^k 0,5 = 0,5^{k+1}$ si $0 \leqslant k \leqslant 4$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) = 0,5^5$.
2. $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant 5} k\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{1}{16} + 4\frac{1}{32} + 5\frac{1}{32} = 0,96875$.

   Y = nombre de garçons. Il y a exactement 1 garçon sauf s'il y a 5 filles. $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = 0,5^5 = 1/32$. $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = 1) \times 1 = 0,96875$. $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y})$, donc pas efficace.

Exercice 16 : On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :

A : au moins une ampoule est défectueuse ;

B : les 3 ampoules sont défectueuses ;

C : exactement une ampoule est défectueuse.

Correction :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0.736\,26$$

$\mathrm{P(B)} = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = 2.197\,8 \times 10^{-2}$

$\mathrm{P(C)} = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = 0.494\,51$

Exercice 17 : L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction : La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[\mathrm{X} = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3 - k$ sujets parmi les 40 non révisés.

Alors :

1. Les trois sujets tirés ont été révisés : $\mathrm{P[X = 3]} = \dfrac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $\mathrm{P[X = 2]} = \dfrac{\binom{60}{2}.\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Aucun des trois sujets : $\mathrm{P[X = 0]} = \dfrac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0, 1, 2, 3\}$ par :

$$\mathrm{P}[\mathrm{X} = k] = \frac{\binom{60}{k}.\binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :

$k = 0 : \mathrm{P[X = 0]} \simeq 6.110 \times 10^{-2}$

$k = 1 : \mathrm{P[X = 1]} \simeq 0.289$

$k = 2 : \mathrm{P[X = 2]} \simeq 0.438$

$k = 3 : \mathrm{P[X = 3]} \simeq 0.212$

L'espérance est $\mathrm{E(X)} = 1.8$ (selon la formule $\mathrm{E(X)} = np$).

Exercice 18 : Un garagiste dispose de 2 voitures. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec un bénéfice de 50 euros par jour et par voiture. On considère $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant par jour.

x	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)$	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,2$

1. Soit $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits par jour. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$.
2. Calculer le bénéfice moyen par jour.

Exercice 19 : Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 2 boules simultanément. On appelle $\mathbb{X}$ le plus grand des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$ et calculer son espérance.

Exercice 20 : Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise. On appelle $\mathbb{X}$ le rang de sortie de la première boule blanche. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$ et calculer son espérance.

Exercice 21 : Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 secteurs blancs. Sur la deuxième roue, il y a un secteur vert et 9 secteurs blancs. Les gains sont distribués de la manière suivante :

— 3 €si les 2 roues tombent sur les secteurs rouge et vert ;

— 1 €si une seule des 2 roues tombe sur les secteurs blancs ;

— 0,5 €si les deux roues tombent sur des secteurs blancs.

Déterminer le prix minimal que doit exiger le forain pour que son bénéfice moyen soit d'au moins 1,5 €par partie.

Exercice 22 : Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n $(n \geqslant 3)$. On tire simultanément 3 jetons. On appelle $\mathbb{Y}$ le plus grand numéro tiré, $\mathbb{X}$ le plus petit et $\mathbb{Z}$ l'autre. Déterminer les lois de $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ ainsi que leur espérance.

Exercice 23 : On lance successivement 4 pièces de monnaie truquées de telle sorte que la probabilité d'obtenir *Face* soit le double de la probabilité d'obtenir *Pile*. Pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, on note $\mathbb{X}_i$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{X}_i = 1$ si la i-ième pièce donne *Face* et $\mathbb{X}_i = 0$ si la i-ième pièce donne *Pile*. On appelle $\mathbb{Y}$ le nombre entier dont l'écriture en base 2 est $\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2\mathbb{X}_3\mathbb{X}_4$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$, son espérance et sa variance.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   — A:« $\mathbb{Y}$ est pair » ;
   — B:« $\mathbb{Y}$ est multiple de 4 » ;
   — C:« $\mathbb{Y} < 8$ » ;
   — D:« $5 \leqslant \mathbb{Y} < 8$ ».

3. Le nombre $\mathbb{Y}$ obtenu étant strictement inférieur à 8, quelle est la probabilité qu'il soit égal à 5 ?

Exercice 24 : On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires, et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de 2 couleurs différentes. On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$ et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 25 : On jette 10 pièces de monnaie truquées de telle sorte que la probabilité pour chacune d'elles d'obtenir *Pile* est $0,3$. Soit $\mathbb{X}$ le nombre de *Pile* obtenus au cours du lancer.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 *Pile* ? Moins de 3 *Pile* ?
3. Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu plus de 3 *Pile* sachant qu'on en a obtenu plus de 5 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 *Face* sachant qu'on en a obtenu moins de 7.

Exercice 26 : Déterminer la loi de probabilité de la variable $\mathbb{Y} = |\mathbb{X} - n|$ où $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$.

Exercice 27 : Une succession d'individus $A_0, A_1, \cdots, A_n$ se transmet une information binaire du type *oui* ou *non*. Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_0.
2. On suppose que $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 28 : Une variable aléatoire réelle $\mathbb{X}$ suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$. Pour quelle valeur de k la probabilité $p_k = P(\mathbb{X} = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 29 :

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois *Pile*.

III/ Couples de variables aléatoires

Exercice 30 : On lance deux dés à 6 faces. Soit X_1 le résultat du premier dé, X_2 le résultat du deuxième dé, et $S = X_1 + X_2$.

1. Calculer $E(X_1)$ et $Var(X_1)$.
2. En déduire $E(S)$ et $Var(S)$.

Correction :

1. $E(X_1) = 3.5$, $\text{Var}(X_1) = \dfrac{35}{12} \simeq 2,92$.
2. X_1, X_2 sont indépendantes de même loi. D'où $E(S) = 2E(X_1) = 7$ et $\text{Var}(S) = 2\text{Var}(X_1) = \dfrac{35}{6}$.

Exercice 31 : Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y), avec X prenant ses valeurs dans $\{0, 3\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{0, 1\}$. Calculer la covariance entre X et Y.

$X \setminus Y$	0	1
0	1/3	0
3	1/6	1/2

Correction : $E(X) = 2$, $E(Y) = 1/2$, $E(XY) = 3/2$, d'où $\text{Cov}(X, Y) = 1/2$.

Exercice 32 : Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$. On pose $X = U - V$ et $Y = U + V$. Déterminer la covariance entre X et Y.

Correction : $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY)$ car $E(X) = E(U) - E(V) = 0$ (U, V ont même loi). $E(XY) = E((U - V)(U + V)) = E(U^2) - E(V^2) = 0$ (U, V ont même loi).

D'où $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 33 : Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires définies sur (Ω, P) telles que $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_r\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_s\}$.

1. On suppose que la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ suit une loi uniforme. Montrer qu'alors $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ suivent des lois uniformes.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 34 : Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\{z_1, \cdots, z_n\})$. Déterminer les probabilités $P(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$ et $P(\mathbb{X} \geqslant \mathbb{Y})$.

Exercice 35 : On lance deux fois un dé et on note S la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.

1. Si on suppose le dé parfaitement équilibré, déterminer la loi de S.
2. Peut-on truquer le dé afin que S suive une loi uniforme ?

Exercice 36 : On lance un dé parfaitement équilibré n fois, puis une pièce de monnaie parfaitement équilibrée également autant de fois qu'on a obtenu d'as avec le dé, et on compte le nombre de *Pile* obtenus. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les variables aléatoires égales au nombre d'as obtenus avec le dé et au nombre de *Pile* obtenus avec la pièce.

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
3. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$ conditionnée par $\mathbb{Y}$ et la loi de $\mathbb{Y}$ conditionnée par $\mathbb{X}$.

Exercice 37 : A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne et les moteurs sont indépendants les uns des autres. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ?

Exercice 38 : Une urne contient une boule portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3. On suppose que les boules sont indiscernables. On détermine un entier n à trois chiffres en tirant successivement et avec remise 3 boules de l'urne : la première boule tirée fournit le chiffre des centaines, la deuxième le chiffre des dizaines, et la troisième le chiffre des unités.

1. Calculer les probabilités des événements :
   - A:« Obtenir un entier constitué de 3 chiffres impairs » ;
   - B:« Obtenir un nombre pair ».
2. On considère $\mathbb{X}$ la variable aléatoire définie par le nombre de chiffres pairs dans n et $\mathbb{Y}$ par $\mathbb{Y} = 0$ si n est pair et $\mathbb{Y} = 1$ si n est impair.

   Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
3. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. — $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \frac{8}{27}$.
   — $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{3}$.
2. La loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est

	$(\mathbb{Y}=0)$	$(\mathbb{Y}=1)$	Total
$(\mathbb{X}=0)$	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$
$(\mathbb{X}=1)$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$
$(\mathbb{X}=2)$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{6}{27}$
$(\mathbb{X}=3)$	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{27}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

3. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

   Par exemple,
$$P((\mathbb{X}=0)\cap(\mathbb{Y}=0)) \neq P(\mathbb{X}=0)P(\mathbb{Y}=0)$$

Exercice 39 : Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires telles que $\mathbb{Y}=\mathbb{X}^2$ et que la loi de $\mathbb{X}$ soit donnée par :

x	-2	-1	0	1	2
$P(\mathbb{X}=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
3. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. La loi conjointe du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est

	$(\mathbb{Y}=0)$	$(\mathbb{Y}=1)$	$(\mathbb{Y}=4)$	Total
$(\mathbb{X}=-2)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$(\mathbb{X}=-1)$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$(\mathbb{X}=0)$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
$(\mathbb{X}=1)$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$(\mathbb{X}=2)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

2. La loi marginale de $\mathbb{X}$ est donnée par l'énoncé et celle de $\mathbb{Y}$ est donnée par :

y	0	1	4
$P(\mathbb{Y} = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

3. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

   Par exemple,
$$P((\mathbb{X} = 1) \cap (\mathbb{Y} = 0)) \neq P(\mathbb{X} = 1)P(\mathbb{Y} = 0).$$

Exercice 40 : On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. Soit $\mathbb{U}$ le plus petit et $\mathbb{V}$ le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$.
3. $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. La loi conjointe du couple (U, V) est

	$(V = 2)$	$(V = 3)$	$(V = 4)$	Total
$(U = 1)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$(U = 2)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$(U = 3)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

2. La loi marginale de U est donnée par :

x	1	2	3
$P(U = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   La loi marginale de V est donnée par :

x	2	3	4
$P(V = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3. Les variables U et V ne sont pas indépendantes.

   Par exemple,
$$P((U = 3) \cap (V = 2)) \neq P(U = 3)P(V = 2).$$

Exercice 41 :

1. Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	$0,1$	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,1$	$0,2$

Calculer l'espérance et la variance de $\mathbb{X}$.

2. Soit $\mathbb{Y}$ une variable aléatoire prenant les valeurs $3, 4, 5, 6$. Déterminer la loi de probabilité de $\mathbb{Y}$ sachant que $\mathrm{P}(\mathbb{Y} < 5) = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\mathbb{Y} > 5) = \dfrac{1}{2}$, et $\mathrm{P}(\mathbb{Y} = 3) = \mathrm{P}(\mathbb{Y} = 4)$.

Calculer l'espérance et la variance de $\mathbb{Y}$.

3. Soit $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$. Déterminer la loi de $\mathbb{Z}$ si on suppose que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

Correction :

1. — $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,3 + 5 \times 0,1 + 6 \times 0,2 = 3,7$.
   — D'après la formule de König-Huygens : $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) &= 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,1 + 4^2 \times 0,3 + 5^2 \times 0,1 + 6^2 \times 0,2 \\ &= 16,3\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = 16,3 - (3,7)^2 = 2,61$.

2.

y	3	4	5	6
$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$

   — $\mathrm{E}(\mathbb{Y}) = 3 \times \dfrac{1}{6} + 4 \times \dfrac{1}{6} + 5 \times \dfrac{1}{6} + 6 \times \dfrac{1}{2} = 5$.
   — D'après la formule de König-Huygens : $\mathrm{V}(\mathbb{Y}) = \mathrm{E}(\mathbb{Y}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{Y})^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbb{Y}^2) &= 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{79}{3}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{79}{3} - 5^2 = \dfrac{4}{3}$.

3. Le support de $\mathbb{X}$ est $[\![1, 6]\!]$ et le support de $\mathbb{Y}$ est $[\![3, 6]\!]$.

Le support de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est donc $[\![4, 12]\!]$.

$$\begin{aligned}\forall\, p \in [\![4, 12]\!], \quad \mathrm{P}(\mathbb{Z} = p) &= \mathrm{P}(\mathbb{X} + \mathbb{Y} = p) \\ &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{6} [(\mathbb{X} = k) \cap (\mathbb{Y} = p - k)]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}\left((\mathbb{X} = k) \cap (\mathbb{Y} = p - k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}(\mathbb{X} = k)\mathrm{P}(\mathbb{Y} = p - k)\end{aligned}$$

$$\forall p \in [\![4, 12]\!], \quad \mathrm{P}(\mathbb{Z} = p) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}(\mathbb{X} = k)\mathrm{P}(\mathbb{Y} = p - k)$$

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

y	3	4	5	6
$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 4) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 5) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 6) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 7) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 8) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 9) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 10) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{12}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 11) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{60}$$

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = 12) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{60}$$

Finalement, la loi de $\mathbb{Z}$ est donnée par :

z	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{P}(\mathbb{Z} = z)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{6}{60}$