

Matrices et applications linéaires

Exercice 1 : Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Déterminer l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ dont la matrice sur ces deux bases s'écrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Soient E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension 2, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice 2 *i.e.* $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

- | | |
|--|--|
| <p>1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x; y) \mapsto (x + y; y - 2x; -x + 2y)$</p> | <p>4. $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$
 $P \mapsto (X^2 - 1)P' - nXP$</p> |
| <p>2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x; y) \mapsto (x, x + y, x - y, y)$</p> | <p>5. $f : \mathbb{C}_3[X] \longrightarrow \mathbb{C}_3[X]$
 $P \mapsto P(X + 1) - P(X)$</p> |
| <p>3. $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $P \mapsto P(X + 1)$</p> | |

Exercice 4 : On donne l'endomorphisme $f : (x, y) \mapsto (-13x + 6y, -9x + 8y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Soient $u = (1, 3)$ et $v = (2, 1)$.

Vérifier que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

1. Soit $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Soit $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 7 : E est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie non nulle n . Soit f un endomorphisme de E .

1. On suppose que f est nilpotent d'indice p ($p \in \mathbb{N}^*$), c'est-à-dire :

$$f^p = 0 \text{ et } f^{p-1} \neq 0$$

Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Démontrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre dans E .

En déduire que $p \leq n$.

2. On suppose désormais que $p = n$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : Soit f et g les applications linéaires définies par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{et } g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) &\longmapsto (x - y; 2x + z) & (x; y) &\longmapsto (x + y; 3x - y; -x + 2y) \end{aligned}$$

1. Déterminer A et B les matrices respectives de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire l'expression de $g \circ f$.

Exercice 9 : Soit φ l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_1[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ aX + b &\longmapsto -aX + b - 2a.\end{aligned}$$

Montrer que φ est une symétrie et déterminer sa base et sa direction.

Exercice 10 : On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) &\longmapsto (4x + y; 7x + 2y)\end{aligned}$$

1. Écrire la matrice M de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $M^2 - 6M + I_2$ puis en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $u = (x; y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $f^{-1}(u)$.

Exercice 11 : Soit $M =$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est M .
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1} .

Remarque : La matrice M étant une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls, l'inversibilité de M est assurée.

Exercice 12 : On se place dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3)$ la famille définie par :

$$\varepsilon_1 = (1; 0; 0), \varepsilon_2 = (1; 2; 3) \text{ et } \varepsilon_3 = (2; 1; 2).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Soit $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 13 : Déterminer la matrice de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dans
 $(x; y) \longmapsto (5x + 6y; -3x - 4y)$
 $\mathcal{B}' = ((2; -1); (1; -1))$.

Exercice 14 : On pose $v_1 = (1; 0; 0)$, $v_2 = (1; 1; 0)$ et $v_3 = (1; 2; 3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1; v_2; v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On pose alors $F = \text{vect}(v_1; v_2)$ et $G = \text{vect}(v_3)$ de sorte que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.
3. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire l'expression de s .

Exercice 15 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) \longmapsto (10x - y - z; -6x + 9y - 3z; -2x - y + 11z)$$

1. Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$, où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1; 3; 1); (1; 0; -2); (0; 1; -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 : On désigne par u, v, w les trois endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$$u : P \longmapsto P(X - 1), \quad v : P \longmapsto P(X + 1) \quad \text{et} \quad w : P \longmapsto P'.$$

On rapporte $\mathbb{R}_n[X]$ à sa base canonique $\mathcal{B}$.

1. Déterminer les matrices U, V, W de u, v, w dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer U^p, V^p, W^p pour tout entier naturel p .
3. Montrer que U est inversible et donner U^{-1} .

Exercice 17 : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère :

$$Q_0 = 1 + X + X^2 + X^3, \quad Q_1 = X + X^2 + X^3, \quad Q_2 = X^2 + X^3, \quad \text{et} \quad Q_3 = X^3.$$

1. Démontrer que $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
3. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$.

Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 18 : On rapporte $E = \mathbb{R}^3$ à sa base canonique $\mathcal{B}$.

Soient la droite $D = \text{vect}(1, 2, 1)$ et le plan $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 5z = 0\}$.

1. Montrer que $E = D \oplus \Pi$.
2. Soit p la projection vectorielle sur Π parallèlement à D .

Écrire la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

3. Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de :
 - (a) la symétrie vectorielle par rapport à Π parallèlement à D ;
 - (b) la projection sur D parallèlement à Π ;
 - (c) la symétrie vectorielle par rapport à D parallèlement à Π .

Exercice 19 : Dans $E = \mathbb{K}^4$ muni de sa base canonique, on définit :

- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x = t = 0\}$.
- $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x + y = z + t = 0\}$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Écrire la matrice de la projection sur G parallèlement à F .

Exercice 20 : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 21 : Montrer que $A = (\sin(i + j)) \in \mathcal{M}_n$ est de rang au plus 2.

Exercice 22 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 23 : Pour $d \neq 0$, on considère l'équation différentielle $(H_{-\frac{1}{d}})$:

$$y''(x) - \frac{1}{d}xy'(x) + y(x) = 0,$$

d'inconnue une fonction réelle y définie, deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

L'objectif de cet exercice est de prouver qu'il existe admet au moins une solution polynomiale non nulle à $(H_{-\frac{1}{d}})$.

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur à d , et on considère l'application $h : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad h(P) = P'' - \frac{1}{d}XP' + P.$$

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a $\deg h(P) \leq d - 1$.
2. Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
3. Montrer que l'application linéaire h n'est pas surjective.
4. En déduire l'existence d'une solution polynomiale non nulle de l'équation différentielle homogène $(H_{-\frac{1}{d}})$.

Exercice 24 : Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.

$$P \mapsto P(X) + P(X + 1)$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Aide : Pour la surjectivité, on pourra chercher à se ramener à un problème en dimension finie.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que

$$P_n(X) + P_n(X + 1) = 2X^n$$

Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .

3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = nP_{n-1}$.
4. En déduire une expression de $P_n(X)$ comme combinaison linéaire de $P_0(X - 1)$, $P_1(X - 1)$, ... $P_n(X - 1)$.