Matrices et applications linéaires

Exercice 1 : Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Déterminer l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^4$ dont la matrice sur ces deux bases s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction : Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(-3f_1) + y(2f_1 + f_2 + 2f_4) + z(-f_1 - f_2 - f_4) \\ &= (-3x + 2y - z)f_1 + (y - z)f_2 + 0f_3 + (2y - z)f_4 \qquad = \begin{pmatrix} -3x + 2y - z \\ y - z \\ 0 \\ 2y - z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Soient E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent d'indice 2 *i.e.* $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;y-2x\,;-x+2y) \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x, x+y, x-y, y) \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'-nXP \end{array}$
5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$

Exercice 4 : On donne l'endomorphisme $f:(x,y)\longmapsto(-13x+6y,-9x+8y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Soient $u=(1,3)$ et $v=(2,1)$.

   Vérifier que $\mathcal{B}'=(u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 5 : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^2$ et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3\,;\mathbb{R}^2)$ tel que $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

1. Soit $u=(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Correction :

1. $f(u)=A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y-z\\ -2x+y+2z\end{pmatrix}$.
2. $u\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\ker(f) \iff f(u)=0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x+2y-z &=0\\ -2x+y+2z &=0\end{cases} \iff \begin{cases} x &=z\\ y&=0\\ z&=z\end{cases}$

$$\ker(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

D'après le théorème du rang, f est donc de rang 2 dans $\mathbb{R}^2$ donc surjective et $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.

Correction :

1. $f(u) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -2x + y - 2z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}$.
2. $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ -2x + y - 2z & = 0 \\ x + y + 3z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ z & = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \iff \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \iff f \text{ est injective.}$$

D'après le théorème du rang, f est donc de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc surjective et $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7 : E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie non nulle n. Soit f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est nilpotent d'indice p ($p \in \mathbb{N}^*$), c'est-à-dire :

$$f^p = 0 \text{ et } f^{p-1} \neq 0$$

Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Démontrer que $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est libre dans E.

En déduire que $p \leqslant n$.

2. On suppose désormais que $p = n$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : Soit f et g les applications linéaires définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x - y\,;2x + z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x + y\,;3x - y\,;-x + 2y) \end{array}$$

1. Déterminer A et B les matrices respectives de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire l'expression de $g \circ f$.

Correction : $g \circ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (3x - y + z\,; x - 3y - z\,; 3x + 2y + 2z) \end{array}$

Exercice 9 : Soit φ l'application linéaire définie par :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ aX + b & \longmapsto & -aX + b - 2a. \end{array}$$

Montrer que φ est une symétrie et déterminer sa base et sa direction.

Exercice 10 : On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (4x + y\,; 7x + 2y) \end{array}$$

1. Écrire la matrice M de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $M^2 - 6M + I_2$ puis en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $u = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $f^{-1}(u)$.

Exercice 11 : Soit $M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est M.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Remarque : La matrice M étant une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls, l'inversibilité de M est assurée.

Exercice 12 : On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2\,;\varepsilon_3)$ la famille définie par :

$$\varepsilon_1 = (1\,;0\,;0)\,,\ \varepsilon_2 = (1\,;2\,;3)\ \text{ et } \varepsilon_3 = (2\,;1\,;2)\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 13 : Déterminer la matrice de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (5x+6y\,;-3x-4y) \end{array}$ dans $\mathcal{B}' = ((2\,;-1)\,;(1\,;-1))$.

Exercice 14 : On pose $v_1 = (1\,;0\,;0)$, $v_2 = (1\,;1\,;0)$ et $v_3 = (1\,;2\,;3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1\,;v_2\,;v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On pose alors $\mathrm{F} = \text{vect}\ (v_1\,;v_2)$ et $\mathrm{G} = \text{vect}\,(v_3)$ de sorte que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(s)$.
3. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire l'expression de s.

Exercice 15 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

1. Déterminer $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$, où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Déterminer $\mathrm{B} = \mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(u)$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. On a directement $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.
2. Notons $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$.

   On a :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrices et applications linéaires

On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\mathscr{L}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On en déduit que $\mathrm{P} \sim_{\mathscr{L}} \mathrm{I}_n$, donc P est inversible et $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}$ et P^{-1} se lit dans le membre de droite de la matrice augmentée.

On utilise la formule de changement de base : $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Ainsi, après calcul, on obtient :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

3. B étant une matrice diagonale, on obtient $\mathrm{B}^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} = 6^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Après calcul, on en déduit :

$$\mathrm{A}^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2.6^n + 4.12^n & 6^n - 12^n & 6^n - 12^n \\ 6.6^n - 6.12^n & 3.6^n - 3.12^n & 3.6^n - 3.12^n \\ 2.6^n - 2.12^n & 6^n - 12^n & 6^n - 5.12^n \end{pmatrix}$$

Exercice 16 : On désigne par u, v, w les trois endomorphismes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ définis par :

$$u : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}-1), \quad v : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \quad \text{et} \quad w : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'.$$

On rapporte $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ à sa base canonique $\mathscr{B}$.

1. Déterminer les matrices U, V, W de u, v, w dans la base $\mathscr{B}$.
2. Calculer $\mathrm{U}^p, \mathrm{V}^p, \mathrm{W}^p$ pour tout entier naturel p.
3. Montrer que U est inversible et donner U^{-1}.

Exercice 17 : Dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$, on considère :

$\mathrm{Q}_0 = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3$, $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3$, $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3$, et $\mathrm{Q}_3 = \mathrm{X}^3$.

1. Démontrer que $\mathscr{C} = (\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.
3. Soit $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3$.

   Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$.

Correction :

1. La famille $\mathscr{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est échelonnée en valuation. Elle est donc libre.

   De plus, elle compte 4 vecteurs, et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, donc $\mathscr{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Remarque : $\begin{cases} Q_0 = 1 + X + X^2 + X^3 \\ Q_1 = X + X^2 + X^3 \\ Q_2 = X^2 + X^3 \\ Q_3 = X^3 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = Q_0 - Q_1 \\ X = Q_1 - Q_2 \\ X^2 = Q_2 - Q_3 \\ X^3 = Q_3 \end{cases}$.

3. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$.

   Posons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(P)$.

   D'après le cours, on a $V = (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}})^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a+b \\ -b+c \\ -c+d \end{pmatrix}$

   Donc,
   $$P = aQ_0 + (b-a)Q_1 + (c-b)Q_2 + (d-c)Q_3.$$

   Vérification :
   $$\begin{aligned} aQ_0 + (b-a)Q_1 + (c-b)Q_2 + (d-c)Q_3 &= a(Q_0 - Q_1) + b(Q_1 - Q_2) + c(Q_2 - Q_3) + dQ_3 \\ &= a1 + bX + cX^2 + dX^3 \\ &= P. \end{aligned}$$

Exercice 18 : On rapporte $E = \mathbb{R}^3$ à sa base canonique $\mathscr{B}$.

Soient la droite $D = \mathrm{vect}\,(1, 2, 1)$ et le plan $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 5z = 0\}$.

1. Montrer que $E = D \oplus \Pi$.
2. Soit p la projection vectorielle sur Π parallèlement à D.

   Écrire la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
3. Écrire la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de :

   (a) la symétrie vectorielle par rapport à Π parallèlement à D ;
   (b) la projection sur D parallèlement à Π ;
   (c) la symétrie vectorielle par rapport à D parallèlement à Π.

Matrices et applications linéaires

Correction :

1. Posons $u = (1, 2, 1)$. Alors $\mathrm{D} = \mathrm{vect}\,(u)$.

   De plus,

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \Pi &\iff x - 2y + 5z = 0\\ &\iff x = 2y - 5z\\ &\iff (x, y, z) = (2y - 5z, y, z)\\ &\iff (x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-5, 0, 1)\\ &\iff (x, y, z) \in \mathrm{vect}\,((2, 1, 0), (-5, 0, 1))\end{aligned}$$

   En posant, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (-5, 0, 1)$.

$$\Pi = \mathrm{vect}\,(v, w).$$

   La famille $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} u = (1, 2, 1)\\ v = (2, 1, 0)\\ w = (-5, 0, 1)\end{pmatrix}$ est libre (à montrer !) à 3 vecteurs en dimension 3, donc $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   D'après un théorème du cours, $\mathrm{vect}\,(u) \oplus \mathrm{vect}\,(v, w) = \mathbb{R}^3$.

   Donc,

$$\mathrm{D} \oplus \Pi = \mathbb{R}^3.$$

2. p est la projection vectorielle sur Π parallèlement à D.

   On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

   D'après le cours, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \mathrm{P}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p)\mathrm{P}^{-1}$.

   où $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5\\ -2 & 6 & -10\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

   Donc,

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5\\ -2 & 6 & -10\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

   Remarque : On vérifiera que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

3. (a) Soit S est la symétrie par rapport à Π parallèlement à D.

   On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5\\ -2 & 5 & -10\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix}$.

   Remarque : On vérifiera que la relation $\mathrm{Id} + \mathrm{S} = 2p$ *i.e.* $\mathrm{S} = 2p - \mathrm{Id}$ se transpose matriciellement et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}) = 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.

(b) Soit p' la projection sur D parallèlement à Π.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p') = \mathrm{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&5\\2&-4&10\\1&-2&5\end{pmatrix}.$$

Remarque : $p + p' = \mathrm{Id}$ *i.e.* $p' = \mathrm{Id} - p$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p') = \mathrm{I}_3 - \mathrm{A}$.

(c) Soit S' la symétrie par rapport à D parallèlement à Π.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix}0&-2&5\\2&-5&10\\1&-2&4\end{pmatrix}.$$

Remarque : $\mathrm{S} + \mathrm{S}' = 0$ *i.e.* $\mathrm{S}' = -\mathrm{S}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}') = -\mathrm{A}$.

Exercice 19 : Dans $\mathrm{E} = \mathbb{K}^4$ muni de sa base canonique, on définit :

— $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x = t = 0\right\}$.
— $\mathrm{G} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x + y = z + t = 0\right\}$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Écrire la matrice de la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 20 : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{A} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}8&-2&-2\\-2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Correction : f est par construction une application linéaire.

Donc,

$$\begin{aligned} f \text{ est un projecteur} &\iff f \circ f = f \\ &\iff \mathrm{A} \times \mathrm{A} = \mathrm{A} \end{aligned}$$

Or, on a bien $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ (par calcul) donc f est un projecteur.

De plus,

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff f((x, y, z)) = (0, 0, 0) \iff \mathrm{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff (x, y, z) \in \mathbb{R}(1, 2, 2)$$

$$\text{Donc, } \ker(f) = \mathbb{R}(1,2,2).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{vect}\left(\{f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1)\}\right)\\ &= \mathrm{vect}\left(\{(8,-2,-2),(-2,5,-4),(-2,-4,5)\}\right)\end{aligned}$$

Or, $(8,-2,-2) = -2(-2,5,-4) - 2(-2,-4,5)$

$$= \mathrm{vect}\left((-2,5,-4),(-2,-4,5)\right) \quad \text{en arrangeant un peu, on trouve finalement}$$
$$\underset{e_1 \leftarrow \frac{1}{9}(e_1-e_2)}{=} \mathrm{vect}\left((0,1,-1),(2,4,-5)\right) \underset{e_2 \leftarrow e_2-4e_1}{=} \mathrm{vect}\left((0,1,-1),(2,0,-1)\right).$$

Remarque : Comme $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{I}d)$, on peut également résoudre un système pour trouver la même chose.

Donc, f est le projecteur sur le plan dirigé par $(0,1,-1)$ et $(2,0,-1)$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}(1,2,2)$

Exercice 21 : Montrer que $A = (\sin(i+j)) \in \mathscr{M}_n$ est de rang au plus 2.

Exercice 22 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 23 : Pour $d \neq 0$, on considère l'équation différentielle $\left(\mathrm{H}_{-\frac{1}{d}}\right)$:

$$y''(x) - \frac{1}{d}xy'(x) + y(x) = 0,$$

d'inconnue une fonction réelle y définie, deux fois dérivables sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

L'objectif de cet exercice est de prouver qu'il existe admet au moins une solution polynomiale non nulle à $\left(\mathrm{H}_{-\frac{1}{d}}\right)$.

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur à d, et on considère l'application $h : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad h(P) = P'' - \frac{1}{d}XP' + P.$$

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a $\deg h(P) \leqslant d-1$.
2. Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
3. Montrer que l'application linéaire h n'est pas surjective.
4. En déduire l'existence d'une solution polynomiale non nulle de l'équation différentielle homogène $\left(\mathrm{H}_{-\frac{1}{d}}\right)$.

Exercice 24 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X) + P(X+1) \end{array}$.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   Aide : Pour la surjectivité, on pourra chercher à se ramener à un problème en dimension finie.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que

$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$$

   Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = nP_{n-1}$.
4. En déduire une expression de $P_n(X)$ comme combinaison linéaire de $P_0(X-1)$, $P_1(X-1)$, $\cdots$ $P_n(X-1)$.

Correction :

1. D'après les lois du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}[X]$, f est linéaire *i.e.* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X) + (\lambda P + Q)(X+1) \\ &= \lambda P(X) + Q(X) + \lambda P(X+1) + Q(X+1) \\ &= \lambda(P(X) + P(X+1)) + Q(X) + Q(X+1) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

   Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.

   Comme $\deg(f(P)) \leqslant \max(\deg P\,;\deg P) = \deg P$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ *i.e.* un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de monôme dominant aX^m tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

   Si P est non nul alors $a \neq 0$ et $m \geqslant 0$.

   Cependant, le monôme dominant de $f(P)$ est alors $2aX^m$ qui ne peux être nul si $m \geqslant 0$.

   Conclusion, $m < 0$ *i.e.* P est le polynôme nul et f est injectif.

   Commentaires : *On verra plus tard qu'alors la matrice de f (dans la base canonique est donc une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont égaux à 2. En particulier, elle est inversible et f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc de $\mathbb{R}[X]$.*

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2X^n \in \mathbb{R}_n[X]$, espace sur lequel f est bijective, donc il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P_n) = P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n.$$

   Le polynôme P_n est de degré n et son coefficient dominant est 1. Autrement dit P est normalisé.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente, $P_n' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et vérifie $\dfrac{1}{n} f(P_n') = 2X^{n-1}$

   Par unicité des polynômes P_n, on a donc $\dfrac{1}{n} f(P_n') = f(P_{n-1}) \iff f(P_n') = f(nP_{n-1})$ par linéarité.

Par injectivité de f, on en déduit $\mathrm{P}_n' = n\mathrm{P}_{n-1}$.

Commentaires : *La relation,* $\mathrm{P}_n' = n\mathrm{P}_{n-1}$ *entraîne que* $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{P}_n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathrm{P}_{n-k}$ *avec* $\mathrm{P}_n^{(0)} = \mathrm{P}_n$.

La famille $\big(\mathrm{P}_0(\mathrm{X}-1), \mathrm{P}_1(\mathrm{X}-1), \cdots, \mathrm{P}_n(\mathrm{X}-1)\big)$ de polynômes non nuls est étagée par les degrés donc forment une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, \cdots, a_n)$ tel que $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}_k(\mathrm{X}-1)$.

Par définition des P_n et linéarité de f, on a :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{X}^n = f(\mathrm{P}_n) &= \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(\mathrm{P}_k(\mathrm{X}-1)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\, (\mathrm{P}_k(\mathrm{X}-1) + \mathrm{P}_k(\mathrm{X})) \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} a_k\, (\mathrm{X}-1)^k \end{aligned}$$

Or, $\mathrm{X}^n = (\mathrm{X}-1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{X}-1)^k$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{X}-1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\, (\mathrm{X}-1)^k$$

En identifiant les coefficients sur la base de Taylor centrée en 1 $(1, \mathrm{X}-1, \ldots, (\mathrm{X}-1)^n)$, on obtient :

$$a_k = \binom{n}{k}.$$

Finalement,

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{P}_k(\mathrm{X}-1).$$

Commentaires : *Je n'utilise pas la relation sur les dérivées donc voilà une autre méthode plus moche mais dans l'esprit de l'exercice :*

La famille $\big(\mathrm{P}_0(\mathrm{X}-1), \mathrm{P}_1(\mathrm{X}-1), \cdots \mathrm{P}_n(\mathrm{X}-1)\big)$ de polynômes non nuls est étagée par les degrés donc forment une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_{n,0}, \cdots, a_{n,n})$ tel que $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \mathrm{P}_k(\mathrm{X}-1)$.

En dérivant membre à membre et considérant que $\mathrm{P}_n' = n\mathrm{P}_{n-1}$ et $\mathrm{P}_0 = 1$, on obtient :

$$\mathrm{P}_n' = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \mathrm{P}_k'(\mathrm{X}-1) = \sum_{k=1}^{n} k a_{n,k} \mathrm{P}_{k-1}(\mathrm{X}-1) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{n,k+1} \mathrm{P}_k(\mathrm{X}-1).$$

Or, $\mathrm{P}_n' = n\mathrm{P}_{n-1} = n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} \mathrm{P}_k(\mathrm{X}-1)$.

Par liberté de la famille $\Big(P_0(X-1), P_1(X-1), \cdots P_n(X-1)\Big)$, l'écriture est unique et on obtient :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\ (k+1)a_{n,k+1} = na_{n-1,k} \iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{n,k} = \frac{n}{k}\, a_{n-1,k-1}.$$

Par récurrence, on en déduit que $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{n,k} = \binom{n}{k}\, a_{n-k,0}$ puis

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, a_{n-k,0}\, P_k(X-1).$$

Il ne reste plus qu'à trouver $a_{n-k,0}$. On revient à l'égalité fonctionnelle :

$$\begin{aligned} 2X^n &= P_n(X) + P_n(X+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} P_k(X-1) + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} P_k(X) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\Big(P_k(X-1) + P_k(X)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(2(X-1)^k) \end{aligned}$$

On évalue en 1 pour trouver :

$$2 = 2a_{n,0} \iff a_{n,0} = 1.$$

Commentaires : *Si on écrit* $X^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} (X-1)^k$ *on peut trouver tous les* $a_{n,k}$, $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$.

Finalement,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, P_k(X-1).$$

Matrices et applications linéaires