

Variables aléatoires

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.

On tire successivement 2 boules.

On note X la variable aléatoire définie par $X = 0$ si la première boule est noire et $X = 1$ si elle est blanche.

On définit Y de la même façon pour la deuxième boule.

On effectue les tirages **avec** remise.

- Donner le support de X et Y .

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}.$$

- Calculer $P((X = 0) \cap (Y = 0))$.

Trois boules noires sur sept à chaque tirage donc $P((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$.

- Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) .

La loi conjointe du couple (X, Y) est

	$(Y = 0)$	$(Y = 1)$	Total
$(X = 0)$	$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$	$\frac{3}{7}$
$(X = 1)$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$	$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$	$\frac{4}{7}$
Total	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

- En déduire $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) + P((X = 0) \cap (Y = 1)) = \frac{3}{7}.$$

- Déterminer les lois marginales de X et Y .

x	0	1
$P(X = x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

et

y	0	1
$P(Y = y)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

- Calculer $P_{(X=0)}(Y = 0)$.

$$P_{(X=0)}(Y = 0) = \frac{P((X = 0) \cap (Y = 0))}{P(X = 0)} = \frac{\frac{9}{49}}{\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}$$

7. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

D'après la loi conjointe de la question (3), $\forall (x; y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$, $P((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)) = P(\mathbb{X} = x) \times P(\mathbb{Y} = y)$ donc les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

8. Calculer $E(\mathbb{X})$.

$$E(\mathbb{X}) = 0 \times P(\mathbb{X} = 0) + 1 \times P(\mathbb{X} = 1) = \frac{4}{7}.$$

Variables aléatoires

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.

On tire successivement 2 boules.

On note X la variable aléatoire définie par $X = 0$ si la première boule est noire et $X = 1$ si elle est blanche.

On définit Y de la même façon pour la deuxième boule.

On effectue les tirages **sans** remise.

1. Donner le support de X et Y .

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}.$$

2. Calculer $P((X = 0) \cap (Y = 0))$.

$$\text{Trois boules noires sur sept puis deux sur six donc } P((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}.$$

3. Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) .

La loi conjointe du couple (X, Y) est

	$(Y = 0)$	$(Y = 1)$	Total
$(X = 0)$	$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
$(X = 1)$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
Total	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

4. En déduire $P(X = 1)$.

$$P(X = 1) = P((X = 1) \cap (Y = 0)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{4}{7}.$$

5. Déterminer les lois marginales de X et Y .

x	0	1
$P(X = x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

et

x	0	1
$P(Y = x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

6. Calculer $P_{(X=0)}(Y = 0)$.

$$P_{(X=0)}(Y = 0) = \frac{P((X = 0) \cap (Y = 0))}{P(X = 0)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

7. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

D'après la loi conjointe de la question (3), $P((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{7} \neq \frac{9}{49} = P(X = 0) \times P(Y = 0)$ donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Remarque : On a aussi, avec la question précédente, $P_{(X=0)}(Y = 0) \neq P(Y = 0)$.

8. Calculer $E(X)$.

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = \frac{4}{7}.$$