Extrait de CAPES 20...

Notations et vocabulaire

— *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite* $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ *par*

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$. *Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

— *On dit qu'une variable aléatoire définie sur un univers Ω suit la loi géométrique de paramètre p si* $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et, pour tout entier $k \geqslant 1$,*

$$\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = p_k.$$

On note alors $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

— *On dit qu'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ admet une espérance finie, noté* $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, *si la série de terme général $k\mathrm{P}(\mathbb{X} = k)$ est absolument convergente et on écrit alors :*

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathbb{X} = k).$$

— *Lorsque $\mathbb{X}^2$ admet une espérance finie, on appelle variance de $\mathbb{X}$, notée* $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, *le réel*

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2.$$

Partie A : les lois géométriques

1. Démontrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$, la série de terme général x^k converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

2. Justifier, pour tout $x \in]-1\,;1[$, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   On admet que $\forall\, x \in]-1\,;1[$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

3. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

4. Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

   Démontrer que $\mathbb{X}$ admet une espérance, notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, et une variance, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, vérifiant :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

5. Soient $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{X}_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$, où $p_i \in]0\,;1[$.
   (a) Donner l'espérance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ en fonction des p_i.
   (b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

Partie B : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

6. **Inégalité de Markov**

   Soit $\mathbb{Y}$ une variable aléatoire positive définie sur un univers Ω, possédant une espérance notée $\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.

   Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif et Ω fini,

$$\mathrm{P}(\mathbb{Y} \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathbb{Y})}{a}.$$

7. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

   Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω possédant une espérance notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ et une variance notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$.

   Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif et Ω fini,

$$\mathrm{P}(|\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X})| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathbb{X})}{a^2}.$$

Partie C : le problème du collectionneur

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un fabriquant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à n et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.

Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des n animaux au moins une vignette le représentant.

Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. On note $\mathbb{T}_k$ la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents, éventuellement avec des doublons.

8. En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.

9. Déterminer la loi de $\mathbb{T}_1$.

10. (a) On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2.

    Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats.

    (b) En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,
    $$\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

    (c) En déduire la loi de $\mathbb{T}_2$ *i.e.* $\forall\, q \geqslant 2$, $\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 = q)$.

    (d) On suppose que la collection contient 100 animaux.

    Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieur ou égale à $0,99$.

On note $\mathbb{Z}_k$ le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents.

11. Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, justifier que
    $$\mathbb{Z}_k = \begin{cases} \mathbb{T}_1 & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{T}_k - \mathbb{T}_{k-1} & \text{et } k \geqslant 2. \end{cases}$$

12. En déduire, pour $k \geqslant 2$, une expression de $\mathbb{T}_k$ en fonction des $\mathbb{Z}_i$ ou $i \in [\![1\,;n]\!]$.

13. Démontrer que $\mathbb{Z}_k$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

    En déduire l'espérance et la variance de $\mathbb{Z}_k$.

14. En déduire que $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n\mathrm{H}_n$ et donner un équivalent de $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

15. On admet que les variables aléatoires $\mathbb{Z}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

    (a) Exprimer $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n)$ en fonction de n, B_n et H_n.

    (b) En déduire que $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

16. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,
    $$\mathrm{P}\big(\,|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant \lambda n \ln n\big) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

17. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,
    $$\mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n \geqslant n\mathrm{H}_n + n\ln n\big) \leqslant 0,01.$$

Extrait de CAPES 20...