

Séries

1. On sait que $S_k - S_{k-1} = \sum_{i=0}^k u_i - \sum_{i=0}^{k-1} u_i = u_k$.

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\
 &= \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - S_0 \\
 &= \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)} - \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_n}{n} - S_0 \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n+1} - S_0.
 \end{aligned}$$

2. Si la suite $(S_n)_n$ est bornée, disons par exemple $|S_n| \leq A$ pour tout entier n , alors par inégalité triangulaire, on a :

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{u_k}{k} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{|u_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{A}{k(k+1)} + \frac{A}{n+1} + |S_0|.$$

Or,

$$\frac{A}{k(k+1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{k^2}$$

est le terme général d'une série à termes positifs convergente, et les deux termes restants convergent également (le premier tend vers 0, le second est constant), ce qui prouve que la série de terme général $\left| \frac{u_k}{k} \right|$ est majorée par quelque chose de convergent, et donc convergente (elle est à termes positifs).

Ceci prouve que la série de terme général $\frac{u_k}{k}$ est absolument convergente, donc convergente.

3. Il suffit de poser $u_n = \frac{1}{n}$. On sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente (et de limite $+\infty$), donc la suite $(S_n)_n$ n'est pas bornée. Pourtant, $\sum \frac{u_n}{n} = \sum \frac{1}{n^2}$ est bien une série convergente (série de Riemann ici).

4. (a) Il suffit de remarquer que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ vaut -1 (lorsque n est impair) ou 0 (lorsque n est pair) pour constater que $(S_n)_n$ est bornée. Les questions précédentes nous assurent alors que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- (b) Un calcul tout à fait classique, n'est-ce pas ? Le plus rapide est de passer par une partie réelle. Pour $\theta \neq 0[2\pi]$:

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \cdot 2 \sin \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right) \\ &= \cos \left(\frac{n\theta}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Pour $\theta \equiv 0[2\pi]$, $S_n(\theta) = n + 1$.

- (c) Dans le cas où $\theta \neq 0[2\pi]$, le calcul précédent prouve que $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$, donc la série est bornée. Les questions de début d'exercice assurent alors que $\sum \frac{\cos(n)}{n}$ converge (on prend $\theta = 1$ dans la question précédente). C'est exactement la même chose pour la deuxième série avec, cette fois-ci, $\theta = 2$.

- (d) Comme on a :

$$\sin^2(n) = \frac{1 - \cos(2n)}{2},$$

on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin^2(k)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k)}{k}.$$

D'après la question précédente, la deuxième somme converge vers une limite finie (peu importe sa valeur), alors que la première tend vers $+\infty$ (à une constante près, c'est la série harmonique).

On en déduit que la série de terme général $\frac{\sin^2(n)}{n}$ diverge vers $+\infty$.

- (e) De même, on a

$$\cos^2(k) = \frac{1 + \cos(2k)}{2}.$$

De plus, comme $\cos(k) \in [-1, 1]$, on a $|\cos(k)| \geq \cos^2(k)$, l'inégalité demandée en découle.

Il suffit alors de faire exactement le même raisonnement qu'à la question précédente (avec une inégalité au lieu de l'égalité) pour en déduire que

$$\sum \frac{|\cos(n)|}{n}$$

diverge vers $+\infty$.