

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?

Un ours polaire ... après changement de coordonnées !

Ce premier chapitre de géométrie sera consacré à rappeler les principales définitions et propriétés relatives à la géométrie analytique dans le plan. Autrement dit, nous travaillerons toujours avec des coordonnées. La plupart des notions ont déjà été vues au lycée.

Nous ferons également un bilan de tout ce qu'il y a à savoir sur les deux types d'objets géométriques les plus simples et les plus couramment utilisés dans le plan : les droites et les cercles.

L'outil de base, et pourtant parfois délicat à manipuler, en géométrie, est l'équation d'un ensemble de points.

Dire que $\mathcal{E}$ est d'équation $f(x; y) = 0$ (alors $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble du plan) signifie que $\mathcal{E}$ est composé de tous les points $M(x; y)$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{E}$. Évidemment, on peut et on adaptera cette définition à l'espace $\mathbb{R}^3$.

De manière évidente, tout ceci n'a du sens que lorsqu'on dispose d'un repère (origine + base) pour exprimer les coordonnées, et l'équation de $\mathcal{E}$ dépend fortement du repère choisi pour l'exprimer, même si la forme (l'ensemble des points) ne change pas.

CONTENU

I	Repérage des points et des vecteurs du plan	2
I.1	Repères cartésiens.	2
I.2	Coordonnées polaires	4
II	Produit scalaire	7
II.1	Généralités.	7
II.2	Produit scalaire et projection orthogonale	8
II.3	Expressions du produit scalaire	9
II.4	Propriétés algébriques.	11
III	Produit mixte	13
III.1	Expressions du produit mixte	14
III.2	Interprétation géométrique du produit mixte	15
III.3	Propriétés algébriques.	16
IV	Droites du plan	18
IV.1	Vecteur directeur d'une droite	18
IV.2	Équations paramétriques de droites	18
IV.3	Équations cartésiennes d'une droite	20

IV.4	Équation réduite d'une droite	23
IV.5	Distance d'un point à une droite	25
V	Cercles du plan	28
V.1	Équations cartésiennes de cercles	28
V.2	Intersection d'une droite et d'un cercle	31
V.3	Intersection de deux cercles	33

Dans tout le chapitre, on note $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan. Tous deux seront désignés par le terme de plan : vectoriel ou affine c'est selon.

I/ Repérage des points et des vecteurs du plan

I.1 Repères cartésiens

Définition 1 :

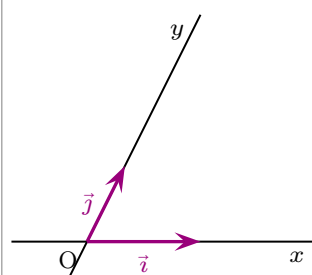
— On appelle *base* du plan $\vec{\mathcal{P}}$ tout couple de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant non colinéaires.

Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ s'écrit alors de manière unique sous la forme

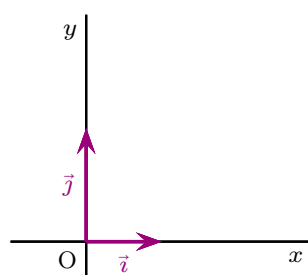
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ où } (x; y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{XXXI.1})$$

— On appelle *repère* (cartésien ou affine) du plan $\mathcal{P}$ tout triplet $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$, où O est un point du plan $\mathcal{P}$. On l'appelle alors *origine* du repère.

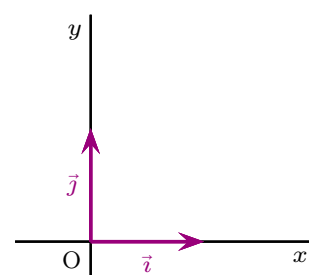
Remarque : $\vec{u}$ est donc une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormé

Figure XXXI.1 – Repères du plan.

Cas particuliers :

— Le repère et la base sont dits *orthogonaux* si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.

Si de plus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits *orthonormés* ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.

— Dans ce dernier cas, si on a défini une orientation du plan, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont dits :

◊ directs si $(\vec{i}; \vec{j}) \equiv +\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

◊ indirects si $(\vec{i}; \vec{j}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Dans tous les exercices de ce chapitre et sauf mention contraire, on se placera dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$.

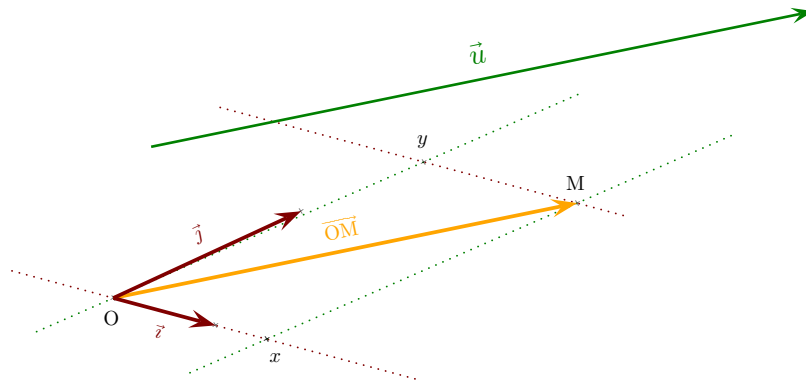


Figure XXXI.2 – Coordonnées de vecteurs et de points dans le plan.

En particulier, pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ où } (x; y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{XXXI.2})$$

Définition 2 (Coordonnées cartésiennes) :

— Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base du plan $\overline{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \overline{\mathcal{P}}$.

On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}(x; y)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x; y)$ de la décomposition (XXXI.1).

— On appelle *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $M(x; y)_{\mathcal{B}}$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x; y)$ de la décomposition (XXXI.2).

ATTENTION | Les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.

Cette dernière définition constitue en fait une identification entre l'ensemble des points du plan, l'ensemble des vecteurs du plan, et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels.

Rappel 1 (Coordonnées de vecteurs) : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base du plan $\overline{\mathcal{P}}$.

— Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

— $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et, dans un repère orthonormé :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

— Si I est le milieu de [AB] alors $I\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}\right)$.

Exercice 1 : Soit ABCD un carré de centre O et G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O et G dans :

1. $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2. $(B; \overrightarrow{BG}; \overrightarrow{AO})$

I.2 Coordonnées polaires

Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues dans le chapitre sur les nombres complexes, le repérage cartésien (couple de coordonnées $(x; y)$) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $z = a + ib$, alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle $z = r e^{i\theta}$.

Soit donc $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

Étant donné un point $M \neq O$, on considère son affixe z .

z peut s'écrire sous forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ où $\rho = |z| = OM$ est le module de z et $\theta \equiv (\vec{i}; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ est un argument de z .

Ainsi, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \vec{i} + \rho \sin(\theta) \vec{j}.$$

où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition 3 : Soit M un point de $\mathcal{P}$.

On appelle *coordonnées polaires* de M, notées $[\rho; \theta]$ tout couple de réels $(\rho; \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \vec{i} + \rho \sin(\theta) \vec{j}.$$

Le point O est alors appelé le *pôle* du repère.

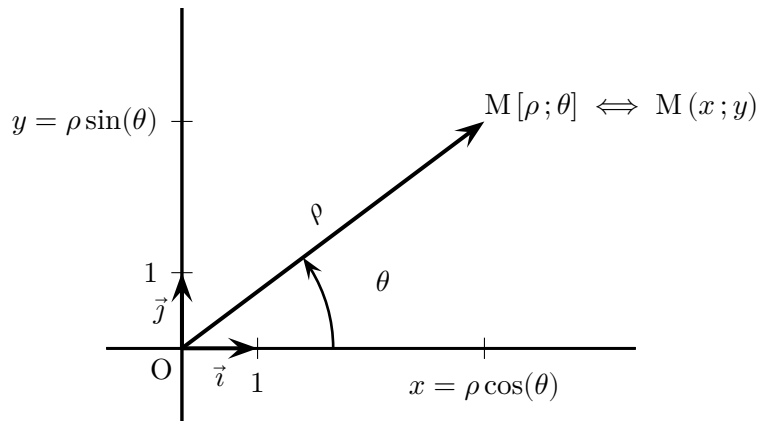


Figure XXXI.3 – Coordonnées polaires et cartésiennes d'un point.

Remarques :

- Si $M \neq O$, on peut prendre $\rho = OM$ et $\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.
- Si $M = O$, $\rho = 0$ suffit à repérer le point M .
- Dans la définition ci-dessus, rien n'empêche ρ d'être négatif.

Dans ce cas, on aura alors $OM = |\rho|$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) \equiv \theta + \pi [2\pi]$.

- Tout point admet une infinité de coordonnées polaires :

$$M\left[1; \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow M\left[1; \frac{9\pi}{4}\right] \Leftrightarrow M\left[-1; \frac{5\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \dots$$

Exercice 2 : Représenter les points $A\left[2; \frac{\pi}{3}\right]$, $B\left[1; \frac{13\pi}{6}\right]$, $C\left[-3; \frac{\pi}{4}\right]$ et $D\left[3; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Proposition 1 (Formules de passage) :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées cartésiennes $(x; y)$ et de coordonnées polaires $[\rho; \theta]$.

On a alors :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Et pour $M \neq O$, on a alors (par exemple) :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et } \theta \text{ défini par } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

Les calculs de coordonnées polaires sont identiques à ceux effectués pour trouver la forme exponentielle d'un nombre complexe.

Exemple 1 : $(2; 2) \equiv \left[2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right] \equiv \left[-2\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Remarque : On peut également utiliser la fonction arctan mais dans ce cas il faut faire attention au quadrant dans lequel on se situe :

Si M est un point de coordonnées $(x; y)$ alors un couple $[\rho; \theta]$ de coordonnées polaires sera :

$$\rho = \text{signe}(x) \times \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Définition 4 (Repère polaire) : Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.

La *base polaire* associée à l'angle θ est le couple $(\vec{u}_\theta; \vec{v}_\theta)$.

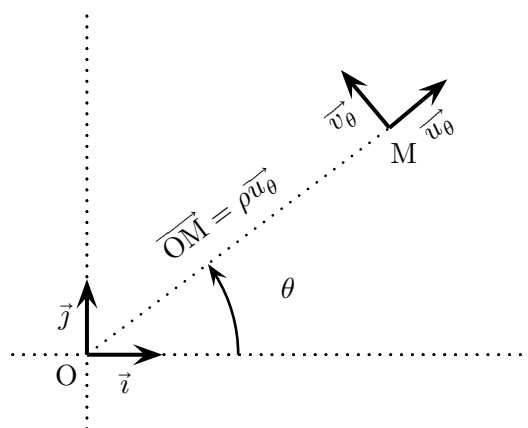


Figure XXXI.4 – Repère polaire.

Remarques :

- Dans cette base $(\vec{u}_\theta; \vec{v}_\theta)$, on a $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\theta$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans le plan complexe, les affixes de $\vec{u}_\theta$ et de $\vec{v}_\theta$ sont respectivement $e^{i\theta}$ et $i e^{i\theta}$.

II/ Produit scalaire

Où va un angle quand il est malade ?
- Chez le vecteur.

II.1 Généralités

Rappel 2 (Norme d'un vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$) : — Soit $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ et deux points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

— Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Définition 5 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\vec{\mathcal{P}}$.

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », le réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}). \quad (\text{P.S 1})$$

— Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque : Comme la fonction cos est paire, le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation du plan.

Corollaire 1.1 (Mesure d'un angle) :

$$\text{Si } \vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \text{ alors } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Rappel 3 (Vecteurs colinéaires et alignement) :

— Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

— Trois points A, B et C sont alignés $\iff \exists k \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Proposition 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

Preuve : Tout découle de la définition et de la relation (P.S 1). En effet, pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}).$$

1. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, leur norme non plus et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \vec{u} \perp \vec{v}.$$

2. Pour la même raison, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff (\vec{u}; \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$ i.e. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens.

Et, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \pi [2\pi]$ i.e. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire.

II.2 Produit scalaire et projection orthogonale

Proposition 3 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$.

Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et soient A, B de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

On note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens.} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$

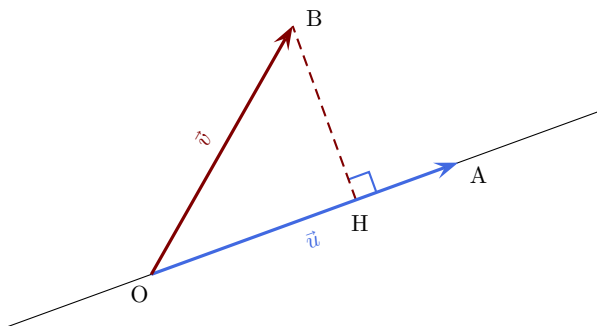


Figure XXXI.5 – Produit scalaire et projection orthogonale.

Preuve : Reprenons les notations de l'énoncé.

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}.$$

Or, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

De plus, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \pm OA \times OH$.

La **proposition (2)** donne alors le résultat escompté.

Remarque : On peut, bien sûr, considérer le projeté orthogonal de A sur (OB) et d'obtenir $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OB}$.

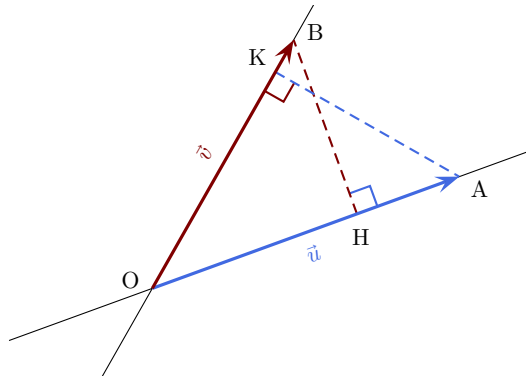


Figure XXXI.6 – $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OB}$.

II.3 Expressions du produit scalaire

Proposition 4 (Relation de Pythagore) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right). \quad (\text{P.S 2})$$

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{P}$.

Pour $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$, et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on reconnaîtra en (P.S 2), le théorème de Pythagore^[1] :

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle en A} &\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ &\iff \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\ &\iff BC^2 = AB^2 + AC^2. \end{aligned}$$

[1]. **Pythagore** - philosophe présocratique qui serait né aux environs de **580 av. J.-C.** à Samos, une île du sud-est de la mer Égée ; on établit sa mort vers **495 av. J.-C.**, à l'âge de 85 ans. Il aurait été également mathématicien et scientifique selon une tradition tardive. Le nom de Pythagore (étymologiquement, Pyth-agoras : « celui qui a été annoncé par la Pythie »), découle de l'annonce de sa naissance faite à son père lors d'un voyage à Delphes.

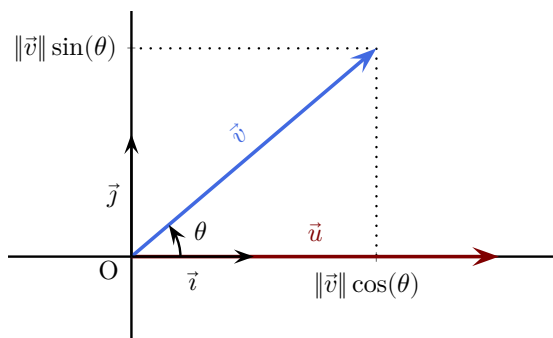
La vie énigmatique de Pythagore permet difficilement d'éclaircir l'histoire de ce réformateur religieux, mathématicien, philosophe et thaumaturge. Il n'a jamais rien écrit, et les soixante et onze lignes des Vers d'Or qu'on lui attribue sont apocryphes et sont le signe de l'immense développement de la légende formée autour de son nom.

Le néopythagorisme est néanmoins empreint d'une mystique des nombres, déjà présente dans la pensée de Pythagore. Hérodote le mentionne comme « l'un des plus grands esprits de la Grèce, le sage Pythagore ». Il conserve un grand prestige. Hegel disait qu'il était « le premier maître universel ».

D'après un écho marquant d'Héraclide du Pont évoqué par Cicéron, Pythagore serait le premier penseur grec à s'être qualifié lui-même de « philosophos », dont le sens est « ami du savoir ou de la sagesse ».

Preuve : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ d'une part et $\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0$ d'autre part. L'égalité est bien vérifiée.
- On suppose à présent que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.



On commence par construire un repère orthonormé adapté du plan. Soit O un point quelconque du plan.

Soit $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\vec{u}$.

En particulier, $\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \vec{i}$.

On complète le vecteur $\vec{i}$ par un vecteur unitaire $\vec{j}$ non colinéaire tel que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct.

Dans ce repère, on a déjà $\vec{u} \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix}$.

Posons $\theta \equiv (\vec{u}; \vec{v}) \equiv (\vec{i}; \vec{v}) \pmod{2\pi}$.

On a alors $\vec{v} \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos(\theta) \\ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \cos(\theta); \|\vec{v}\| \sin(\theta))$.

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \cos(\theta) \right)^2 + \left(\|\vec{v}\| \sin(\theta) \right)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien $\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Proposition 5 :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée.

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ où $((x; y); (x'; y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

(P.S 3)

Preuve : Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée.

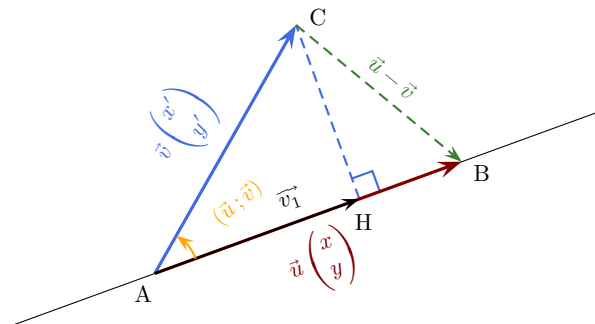
On a successivement :

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}. \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) \right) \\ &= xx' + yy' .\end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= xx' + yy' \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1\end{aligned}$$

**Figure XXXI.7** – Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan.

II.4 Propriétés algébriques

Proposition 6 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

$$1. \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0. \quad (\text{Le produit scalaire est positif}).$$

On note alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$.

$$2. \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}. \quad (\text{Le produit scalaire est défini}).$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{Le produit scalaire est symétrique}).$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & (\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \alpha \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \beta \vec{u}_2 \cdot \vec{v} & \left(\begin{array}{l} \text{Le produit scalaire est linéaire} \\ \text{à gauche et à droite} \end{array} \right). \\
& \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2 \\
5. \quad & \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. & \text{(Identités remarquables).} \\
& \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \\
& (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.
\end{aligned}$$

On dit alors que l'application

$$\begin{aligned}
\cdots, \cdots : \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(\vec{u}; \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v}
\end{aligned}$$

est une forme bilinéaire (4), symétrique (3), définie (2), positive (1).

Vous verrez l'année prochaine que c'est, en fait, La définition d'un produit scalaire.

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{P}$.

Pour $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, la 2^{ème} identité de 5 s'écrit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

On reconnaît la relation d'Al-Kashi. ^[2]

Exercice 4 (Droite d'Euler dans le triangle) : Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H l'orthocentre de ABC.

- (a) Notons A' le milieu de [BC]. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.
(b) Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
- Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
- Démontrer que les points O, G et H sont alignés.

[2]. **Al-Kashi**, dit Ghyath ad-din (auxiliaire de la foi) est originaire de Kachan, en Iran, d'où son nom. Il fut astronome à Samarcande (en l'actuel Ouzbékistan). Un des plus grands mathématiciens de l'époque dont on ignore curieusement la période exacte de sa vie mais on peut retenir approximativement 1380.

Dans son principal traité (Maqalat Gamshid, vers 1400), il développe le calcul trigonométrique à l'usage des astronomes, utilisant les nombres sexagésimaux, système de numération en base 60 qu'utilisaient les astronomes (hérité des Babyloniens et de la Grèce antique) mais aussi des fractions décimales (dont les dénominateurs sont des puissances de 10), on lui doit ce terme dans le calcul de π qu'il fit préalablement en base 60 afin d'être mieux compris par ses contemporains héritiers de Ptolémée.

Dans sa *Clé du calcul* (Miftah al Hisab, 1427), Al-Kashi développe le calcul décimal (hisab al-a'shari) positionnel hérité des Indiens. Il définit le dixième de l'unité, puis les dixièmes du second ordre (centièmes), etc. à l'intention des astronomes, il propose une méthode de conversion d'un nombre de la base 10 à la base 60 et inversement, en précisant dans ce cas une valeur approchée éventuelle car un résultat exact n'est pas assuré.

III/ Produit mixte

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan $\vec{\mathcal{P}}$ est muni d'une orientation.

Définition 6 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

On appelle *produit mixte* (ou *déterminant*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}; \vec{v}]$, le réel défini par :

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$[\vec{u}; \vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}; \vec{v}). \quad (\text{P.M 1})$$

— Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $[\vec{u}; \vec{v}] = 0$.

Vocabulaire : Si l'on veut être précis, on préférera le terme de « produit mixte » dans un cadre euclidien orienté en petite dimension (2 et 3) et le terme de « déterminant » dans les autres cas.

ATTENTION

La fonction sinus étant impaire, le produit mixte dépend de l'orientation du plan.
Un changement d'orientation du plan change le signe du produit mixte.

Proposition 7 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}; \vec{v}] = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}; \vec{v}] = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Preuve : La démonstration est quasi-identique à celle de la **proposition (2)**.

Remarques : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\vec{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $[\vec{i}; \vec{j}] = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \sin(\vec{i}; \vec{j}) = \sin(\vec{i}; \vec{j})$.

Dans ce cas, on a alors :

- ◇ $[\vec{i}; \vec{j}] = 1$ si $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ est directe.
- ◇ $[\vec{i}; \vec{j}] = -1$ si $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ est indirecte.

En particulier,

Corollaire 7.1 :

$$\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \quad [\vec{u}; \vec{u}] = 0.$$

III.1 Expressions du produit mixte

Proposition 8 :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée directe.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où $(x; y), (x'; y') \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

$$[\vec{u}; \vec{v}] = xy' - x'y. \quad (\text{P.M 2})$$

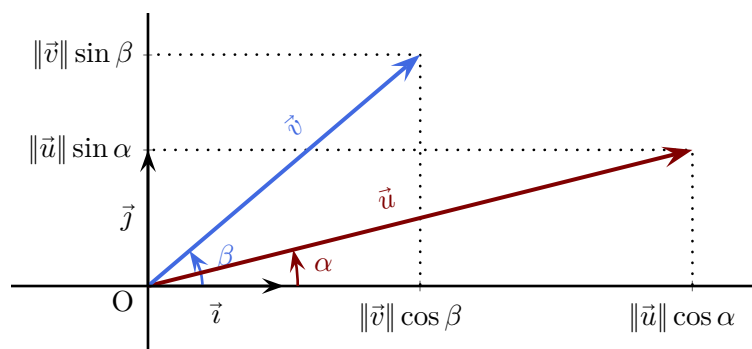
Notation En notant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$, la relation (P.M 2) s'écrit :

$$[\vec{u}; \vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

La proposition porte sur l'égalité entre $[\vec{u}; \vec{v}]$ qui est toujours égal, par définition, à $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}; \vec{v})$ et le nombre $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

ATTENTION | L'égalité (P.M 2) n'a lieu que dans une base orthonormée directe.

Preuve : Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct et soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs décomposés dans la base $\mathcal{B}(\vec{i}; \vec{j})$.



- Si $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $[\vec{u}; \vec{v}] = 0$ et $xy' - x'y = 0$. L'égalité est vérifiée.
- On suppose à présent que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

On pose $\alpha \equiv (\vec{i}; \vec{u}) [2\pi]$ et $\beta \equiv (\vec{i}; \vec{v}) [2\pi]$.

On a simplement $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \cos \alpha \\ \|\vec{u}\| \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos \beta \\ \|\vec{v}\| \sin \beta \end{pmatrix}$.

De plus, $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{i}) + (\vec{i}; \vec{v}) \equiv (\vec{i}; \vec{v}) - (\vec{i}; \vec{u}) \equiv \beta - \alpha [2\pi]$.

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } [\vec{u}; \vec{v}] &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}; \vec{v}) \\
 &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\beta - \alpha) \\
 &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\beta) \cos(\alpha) - \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\beta) \sin(\alpha) \\
 &= \underbrace{\|\vec{u}\| \cos(\alpha)}_x \times \underbrace{\|\vec{v}\| \sin(\beta)}_{y'} - \underbrace{\|\vec{u}\| \sin(\alpha)}_y \times \underbrace{\|\vec{v}\| \cos(\beta)}_{x'} \\
 &= xy' - x'y.
 \end{aligned}$$

III.2 Interprétation géométrique du produit mixte

Le produit mixte permet de calculer l'aire d'un parallélogramme.

Proposition 9 :

Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ et D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Alors, $|\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}|$ est l'aire du parallélogramme ABDC :

$$\mathcal{A}_{ABDC} = |\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}|.$$

Vocabulaire : On dit qu'un tel parallélogramme est construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

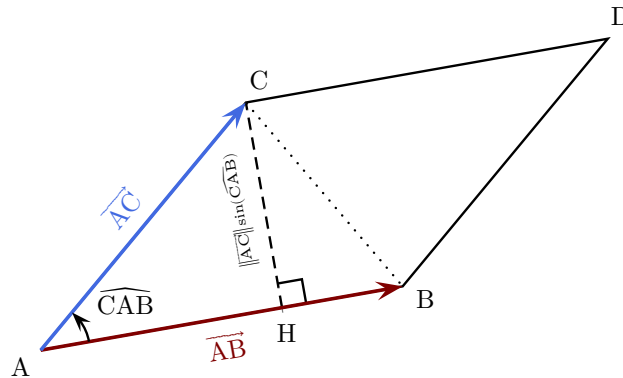


Figure XXXI.8 — $|\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}| = \mathcal{A}_{ABDC}$ où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Preuve : Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ et ABDC construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors ABCD est d'aire nulle tout comme $|\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}|$. La propriété est vraie dans ce cas.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors l'aire $\mathcal{A}$ de ABDC est donnée par $\mathcal{A} = AB \times CH$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Or, $CH = AC \times \sin(\widehat{CAB})$.

D'où, $\mathcal{A} = AB \times CH = AB \times AC \times \sin(\widehat{CAB}) = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \sin(\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})})$, où $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Comme $\sin(\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}) = |\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$, alors on a finalement

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times |\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|.$$

Corollaire 9.1 :

Soient A, B, et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Alors l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|.$$

Exercice 5 : On donne A(1, 2), B(2, 3), C(6, 1) et D(3, 0) dans un repère orthonormé direct.

1. Quelle est l'aire de ABC ?
2. Justifier que ABD est rectangle en A.

III.3 Propriétés algébriques

Proposition 10 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\vec{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $[\vec{u}; \vec{v}] = -[\vec{v}; \vec{u}]$ (Le produit mixte est anti-symétrique ou alterné).
2. $[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2; \vec{v}] = \alpha[\vec{u}_1; \vec{v}] + \beta[\vec{u}_2; \vec{v}]$
 $[\vec{u}; \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2] = \alpha[\vec{u}; \vec{v}_1] + \beta[\vec{u}; \vec{v}_2]$ $\left(\begin{array}{l} \text{Le produit mixte est linéaire} \\ \text{à gauche et à droite} \end{array} \right).$
3. $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + [\vec{u}; \vec{v}]^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$. (Identité de Lagrange).

On dit alors que l'application

$$\begin{aligned} [\cdots; \cdots] : \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}; \vec{v}) &\longmapsto [\vec{u}; \vec{v}] \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire (2) alternée (1).

Preuve : Tout se fait en utilisant les expressions (P.S 3) et (P.M 2) des produits scalaire et mixte dans une base orthonormée directe.

Exercice 6 : Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer les triangles GAB, GBC et GAC ont la même aire.

Correction : Il suffit juste d'utiliser la propriété du centre de gravité et la linéarité du produit mixte.

On sait que $\mathcal{A}_{GAB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GB}]|$ et $\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}$.

D'où, $\mathcal{A}_{GAB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GA}] + [\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GC}]| = \mathcal{A}_{GAC}$.

De même, pour $\mathcal{A}_{GBC}$.

Proposition 11 :

Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base **quelconque**.

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x'; y')_{\mathcal{B}}$ sont colinéaires si, et seulement si $xy' - x'y = 0$.

ATTENTION

Dans une base quelconque $[\vec{u}; \vec{v}] \neq \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Preuve : Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ d'une base quelconque $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff [\vec{u}; \vec{v}] = 0 \\ &\iff [x\vec{i} + y\vec{j}; x'\vec{i} + y'\vec{j}] = 0. \end{aligned}$$

Par linéarité à gauche,

$$\iff x[\vec{i}; x'\vec{i} + y'\vec{j}] + y[\vec{j}; x'\vec{i} + y'\vec{j}] = 0.$$

Et, par linéarité à droite,

$$\iff xx'[\vec{i}; \vec{i}] + xy'[\vec{i}; \vec{j}] + yx'[\vec{j}; \vec{i}] + yy'[\vec{j}; \vec{j}] = 0$$

Or, par colinéarité, $[\vec{i}; \vec{i}] = [\vec{j}; \vec{j}] = 0$,

$$\iff xy'[\vec{i}; \vec{j}] + yx'[\vec{j}; \vec{i}] = 0$$

Par anti-symétrie,

$$\iff (xy' - x'y)[\vec{i}; \vec{j}] = 0.$$

Comme $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires alors $[\vec{i}; \vec{j}] \neq 0$:

$$\iff xy' - x'y = 0.$$

IV/ Droites du plan

Dans cette partie, sauf mention contraire, on considèrera $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque de $\mathcal{P}$.

IV.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 7 (Vecteur directeur) : Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

On appelle *vecteur directeur* de $(\mathcal{D})$ tout vecteur non nul $\vec{u}$, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $(\mathcal{D})$.

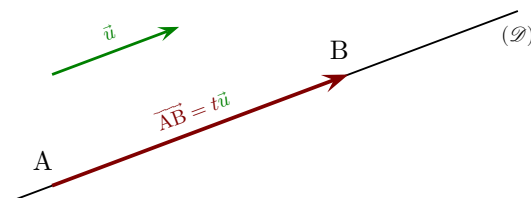


Figure XXXI.9 – Vecteur directeur d'une droite.

Remarque : Pourquoi appeler le paramètre t ?

Tout simplement pour faire référence à la physique où un mobile $M(t)$ sera représenté à tout instant t par ses coordonnées, dépendantes elles-mêmes de t , par ses « équations-horaires » :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = x_A + ta \\ y(t) = y_A + tb \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

IV.2 Équations paramétriques de droites

Proposition 12 :

La droite $(\mathcal{D})$ passant par A $(x_0; y_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha; \beta)$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ce système est appelé équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$.

Remarques :

- Un point $M(x; y)$ appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si $M = A + \text{vect}(\vec{u})$.
- En particulier, le couple $(A, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathcal{D})$. Le paramètre t est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.

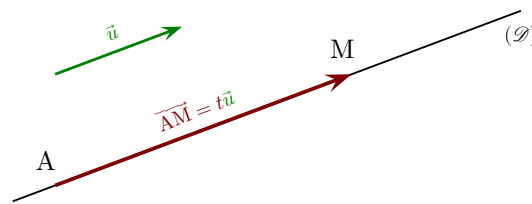


Figure XXXI.10 – Droite $(\mathcal{D})$ passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

Preuve : Soit $(\mathcal{D})$ passant par A $(x_0; y_0)$ et dirigée $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

$M(x; y) \in (\mathcal{D}) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x - x_0 = t\alpha \\ y - y_0 = t\beta \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

Exercice 7 : Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) avec :

1. A $(1; 3)$ et B $(-1; 2)$.

2. A $(1; -3)$ et B $(4; -3)$.

Correction :

1. $\overrightarrow{BA}(2; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) qui passe par A.

Donc, quitte à refaire la démonstration du cours,

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : On prenant le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2; -1)$ comme vecteur directeur, on aurait obtenu

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Il est assez clair que ces deux représentations sont équivalentes.

IV.3 Équations cartésiennes d'une droite

Proposition 13 :

1. Toute droite $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Cette équation est appelée *équation cartésienne* de la droite $(\mathcal{D})$.

2. Réciproquement, soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ alors l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Preuve :

1. Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par $A(x_0; y_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha; \beta)$ où $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (\mathcal{D}) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff [\overrightarrow{AM}; \vec{u}] = 0 \text{ avec } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x - x_0)\beta - (y - y_0)\alpha = 0 \\ &\iff ax + by + c = 0 \text{ en posant } \begin{cases} a = -\beta \\ b = \alpha \\ c = \beta x_0 - \alpha y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

$(\mathcal{D})$ admet bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) = (-\beta; \alpha) \neq (0; 0)$.

2. Réciproquement, soient trois réels a, b et c tels que $(a; b) \neq (0; 0)$. On peut supposer, par exemple, que $a \neq 0$.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$.

Commençons par remarquer que $\mathcal{D}$ est non vide car $A\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \in \mathcal{D}$. Dans le cas où $a = 0$ alors $b \neq 0$ et $B\left(0; -\frac{c}{b}\right) \in \mathcal{D}$.

Ceci dit, continuons en supposant $a \neq 0$. En particulier,

$$ax_A + by_A + c = 0. \quad (\text{XXXI.3})$$

Montrons que $\mathcal{D}$ est une droite passant par A.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0.$$

En soustrayant (XXXI.3) aux deux membres, on obtient :

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}; \vec{u}] = 0 \text{ où } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite passant par A et dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

En conclusion, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : Le système $ax + by + c = 0$ de deux inconnues $(x; y)$ à deux équations est de rang 1 donc possède aucune ou une infinité de couples solutions.

Si $(a; b) \neq (0; 0)$, alors il en possède au moins deux que l'on nomme $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et on suppose que $b \neq 0$.

Tout point $M(x; y)$ sera élément de $\mathcal{D}$ si, et seulement si $(x; y)$ est solution du système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ ax_A + by_A + c &= 0 \\ ax_B + by_B + c &= 0 \end{cases} &\xRightarrow[L_2 \leftarrow L_3 - L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{cases} a(x - x_A) + b(y - y_A) &= 0 \\ a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) &= 0 \end{cases} \\ &\xRightarrow[L_1 \leftarrow \frac{1}{b}((x_B - x_A)L_1 - (x - x_A)L_2)]{(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0} \\ &\Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}] = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\Rightarrow \text{Les points A, B et M sont alignés.} \end{aligned}$$

Exercice 8 : Résoudre graphiquement les systèmes :

$$1. \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \leq 1 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x^2 - y^2 \geq 0 \\ y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Définition 8 (Vecteur normal) : On appelle *vecteur normal* d'une droite ($\mathcal{D}$), tout vecteur non nul orthogonal aux vecteurs directeurs de ($\mathcal{D}$).

Proposition 14 :

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé.

1. Toute droite admet une équation du type $ax + by + c = 0$ dont $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.
2. Réciproquement, soient trois réels a , b et c tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Preuve : Il suffit de remarquer que $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exemple 2 (Droite définie par deux points distincts) :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) où $A(1; 3)$ et $B(-1; 2)$.

Comme $-\overrightarrow{AB}(2; 1)$ est un vecteur directeur de (AB) alors tout point

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } -\overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires.} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) - 2(y-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0. \end{aligned}$$

Donc, $(AB) : x - 2y + 5 = 0$.

Exemple 3 (Droite définie par un point et un vecteur normal) : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$ et $C(-3; -4)$.

Dans le triangle ABC , déterminons une équation cartésienne de la hauteur issue de A . Soit $(\mathcal{D})$ cette droite.

La droite $(\mathcal{D})$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A *i.e.*

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (\mathcal{D}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux.} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) + 3(y-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0 \end{aligned}$$

Donc, une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $x + 3y - 10 = 0$.

Définition 9 (Équation normale d'une droite) : Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation

$$ax + by + c = 0.$$

L'équation de $(\mathcal{D})$ est dite *normale* si $a^2 + b^2 = 1$ i.e. $\|\vec{n}\| = 1$ où $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarques :

- La condition $a^2 + b^2 = 1$ sous-entend que $(a; b) \neq (0; 0)$.
- Pour tout vecteur de norme 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n} = (\cos(\theta); \sin(\theta))$. On retrouve alors souvent des équation de droite, dites *normale*, sous la forme :

$$(\mathcal{D}) : x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = d.$$

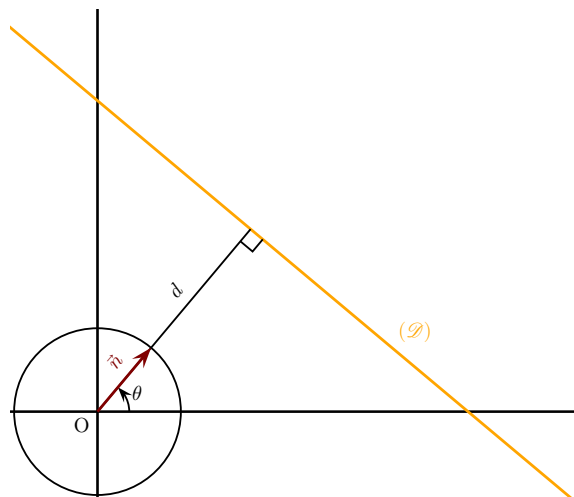


Figure XXXI.11 – Équation normale d'une droite.

Exercice 9 : On considère les points $A(5; 3)$, $B(1; -3)$ et $C(-3; 4)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

IV.4 Équation réduite d'une droite

Proposition 15 :

Soient $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque et $(\mathcal{D})$ une droite.

Alors :

1. Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme

$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme

$$y = mx + p \quad \text{où } (m; p) \in \mathbb{R}^2.$$

- m s'appelle le *coefficient directeur* de la droite
- et p son *ordonnée à l'origine*.

Preuve : Soit $(\mathcal{D})$ une droite dont une équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(-b; a) \neq (0; 0)$.

1. Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $\vec{u}(-b; a)$ est colinéaire à $\vec{j}(0; 1)$ donc $b = 0$ et $a \neq 0$.

On en déduit que $(\mathcal{D})$ a pour équation $x = -\frac{c}{a}$ i.e. de la forme $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $\vec{u}(-b; a)$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}(0; 1)$ donc $b \neq 0$.

L'équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ peut s'écrire sous la forme $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ qui est bien de la forme voulue.

Remarque : Le coefficient directeur de $(\mathcal{D})$ est $m = -\frac{a}{b}$, son ordonnée à l'origine est $p = -\frac{c}{b}$ et un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(1; m)$.

Remarque : Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ quelconque, soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$ de sorte que (AB) ne soit pas parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$.

Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Il traduit la proportionnalité entre les accroissements des ordonnées et des abscisses des points de la droite (AB) .

Proposition 16 :

1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si leur coefficient directeur sont égaux.
2. Deux droites sont orthogonales si, et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 dans un repère orthonormé.

Plus précisément, si $(\mathcal{D}) : y = mx + p$ et $(\mathcal{D}') : y = m'x + p'$ alors :

1. $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}') \iff m = m'$.
2. $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \iff mm' = -1$ si $\mathcal{R}$ est orthonormé.

Preuve : Soient $\begin{cases} (\mathcal{D}) : y = mx + p \\ (\mathcal{D}') : y = m'x + p' \end{cases}$ où m, m', p et p' sont des réels.

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{u}(1; m)$ et $\vec{u}'(1; m')$.

Il suffit de traduire les propriétés en terme de produits mixte et scalaire :

$$1. (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}') \iff [\vec{u}; \vec{u}'] = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{vmatrix} = 0 \iff m' - m = 0 \iff m = m'.$$

2. On suppose que le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormé.

$$(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \iff \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0 \iff 1 + mm' = 0 \iff mm' = -1.$$

Exercice 10 : On considère les droites $(\mathcal{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}') : 3x - y = 1$.

On note B (5 ; 2) et C (2 ; -7).

1. Justifier que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.
2. Donner une équation cartésienne de (AB).
3. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par B.
4. Donner une équation cartésienne de la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par B.
5. Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

Cette médiatrice est-elle parallèle à $(\mathcal{D})$? à $(\mathcal{D}')$?

IV.5 Distance d'un point à une droite

Définition 10 : Soient $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan $\mathcal{P}$.

On appelle *distance* du point A à la droite $(\mathcal{D})$, noté $d(A; (\mathcal{D}))$, la plus petite des distances AM lorsque le point M parcourt la droite $(\mathcal{D})$:

$$d(A; (\mathcal{D})) = \inf \{ AM / M \in (\mathcal{D}) \}.$$

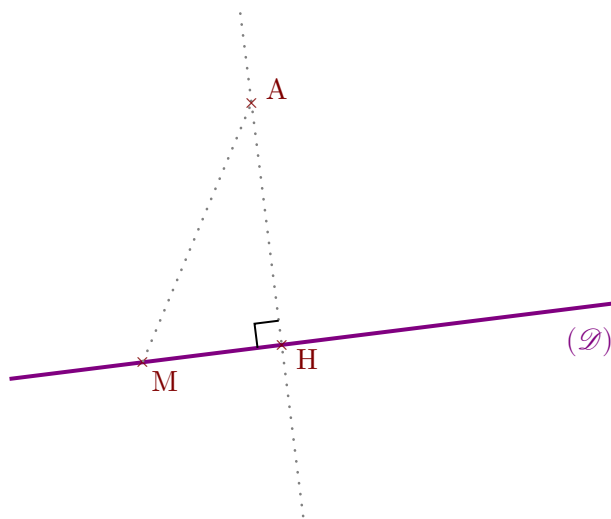


Figure XXXI.12 – $d(A; (\mathcal{D})) = AH$ où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

Théorème 17 :

Soient $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan $\mathcal{P}$.

$$d(A; (\mathcal{D})) = AH \iff H \text{ est le projeté orthogonal de A sur } (\mathcal{D}).$$

Preuve : Soient M un point quelconque de $(\mathcal{D})$ et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHM rectangle en H, on a :

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 > AH^2 \implies AM \geqslant AH.$$

Donc $d(A; (\mathcal{D})) \geqslant AH$ avec égalité pour $M = H$ donc $d(A; (\mathcal{D})) = AH$.

Exercice 11 : Soit ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur de ABC.

Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés de ABC ne dépend pas de M.

Proposition 18 (Calcul de la distance d'un point à une droite) :

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque.

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur directeur : Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et soit $M \in \mathcal{P}$ alors :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur normal : Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A, de vecteur normal $\vec{n}$ et soit $M \in \mathcal{P}$ alors :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Preuve : Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque.

Soient $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A et $M \in \mathcal{P}$. On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite $(\mathcal{D})$ alors :

- Supposons que $(\mathcal{D})$ soit dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Par linéarité du produit mixte, on a :

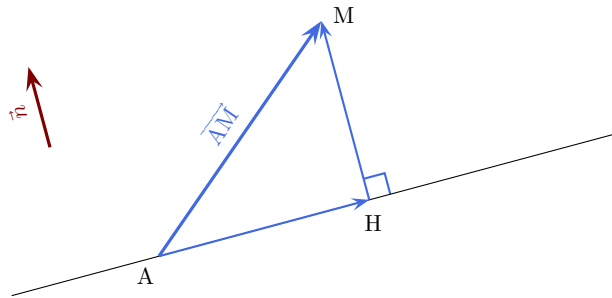
$$[\vec{u}; \overrightarrow{AM}] = [\vec{u}; \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}] = [\vec{u}; \overrightarrow{AH}] + [\vec{u}; \overrightarrow{HM}].$$

Or, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires i.e. $[\vec{u}; \overrightarrow{AH}] = 0$.

Par ailleurs, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux donc $[\vec{u}; \overrightarrow{HM}] = \pm \|\vec{u}\| \times \|\overrightarrow{HM}\| = \pm \|\vec{u}\| \times HM$.

$$\text{Ainsi, } [\vec{u}; \overrightarrow{AM}] = \pm \|\vec{u}\| \times HM \Rightarrow |[\vec{u}; \overrightarrow{AM}]| = \|\vec{u}\| \times HM \Rightarrow d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|[\vec{u}; \overrightarrow{AM}]|}{\|\vec{u}\|}.$$

2. Supposons que $(\mathcal{D})$ ait pour vecteur normal $\vec{n}$.



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}.$$

Or, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux i.e. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

Par ailleurs, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \pm \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{HM}\| = \pm \|\vec{n}\| \times HM$.

$$\text{Ainsi, } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \pm \|\vec{n}\| \times HM \Rightarrow |\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}| = \|\vec{n}\| \times HM \Rightarrow d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Corollaire 18.1 (Cas d'une droite définie par une équation cartésienne dans un RON) :

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$.

Pour tout point $M(x_M; y_M) \in \mathcal{D}$, on a :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Remarque : Dans le cas d'une équation normale donc de la forme $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = d$, on a :

$$d(O; (\mathcal{D})) = |d|.$$

Preuve : Sachant que $(\mathcal{D})$ est dirigée par $\vec{u}(-b; a)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ il suffit d'appliquer l'une ou l'autre des deux formules précédentes :

Soit $M(x_M; y_M) \in \mathcal{P}$. Alors :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_M + by_M - (ax_A + by_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Or, $A \in (\mathcal{D}) \iff c = -(ax_A + by_A)$.

$$\text{Donc, } d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 12 : Calculer la distance du point $A(-2; -1)$ à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $3x + 4y - 5 = 0$.

V/ Cercles du plan

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé du plan $\mathcal{P}$.

V.1 Équations cartésiennes de cercles

Proposition 19 :

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_\omega; y_\omega)$ où $(x_\omega; y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R \geq 0$.

Soit $M \in \mathcal{P}$ un point. Alors,

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = R^2.$$

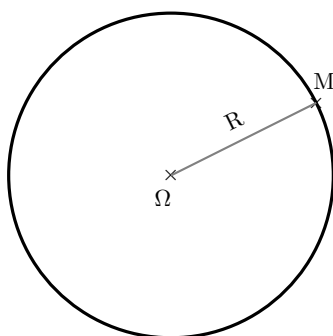


Figure XXXI.13 – Cercle de centre Ω et de rayon R .

Preuve : Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_\omega; y_\omega)$ où $(x_\omega; y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R \geq 0$ et $M \in \mathcal{P}$ un point du plan. Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff \Omega M = R \iff \Omega M^2 = R^2 \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = R^2.$$

Remarques : On appelle *disque* de centre $\Omega(x_\omega; y_\omega)$ et de rayon $R \geq 0$ l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ M(x; y) / (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 \leq R^2 \right\}.$$

Plus particulièrement,

- $M(x; y)$ est strictement à l'extérieur du cercle $\mathcal{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 > R^2$.
- $M(x; y)$ est strictement à l'intérieur du cercle $\mathcal{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 < R^2$.

Proposition 20 :

Soient a, b et c des réels et $\mathcal{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

- Si $c < a^2 + b^2$ alors $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
- Si $c = a^2 + b^2$ alors $\mathcal{C}$ est réduit au point $\Omega(a; b)$.
- Si $c > a^2 + b^2$ alors $\mathcal{C}$ est vide.

Preuve : Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} &\iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c. \end{aligned}$$

- Si $c < a^2 + b^2$ alors, en posant $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, on a :

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \iff \Omega M = R, \text{ où } \Omega(a; b).$$

$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

- Si $c = a^2 + b^2$ alors

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ est donc réduit au point $\Omega(a; b)$.

- Si $c > a^2 + b^2$ alors l'équation $\underbrace{(x - a)^2 + (y - b)^2}_{\geq 0} = \underbrace{a^2 + b^2 - c}_{< 0}$ n'a pas de solutions.

Donc $\mathcal{C}$ est vide.

Exercice 13 : Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0.$$

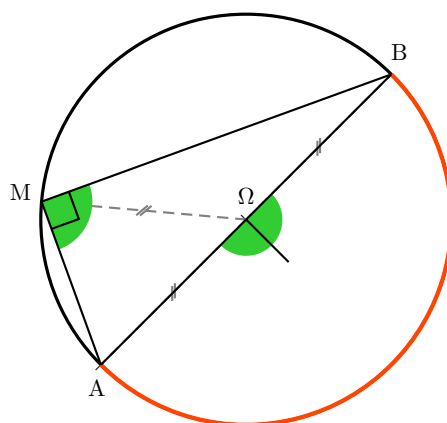
Correction : On a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0 \iff (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc le cercle de centre $\Omega(-2; 3)$ et de rayon 5.

Proposition 21 :

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.



Un triangle est rectangle si, et seulement si un de ses côtés est le diamètre de son cercle circonscrit.

Figure XXXI.14 – Théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle (Théorème de Thalès anglo-saxon).

Preuve : Soit Ω le milieu de $[AB]$. Pour tout point $M(x; y) \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}) \\
 &\Leftrightarrow M\Omega^2 + \overrightarrow{M\Omega} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B})}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B}}_{=-\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = -\Omega A^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow M\Omega^2 - \Omega A^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \Omega M = \Omega A \\
 &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \Omega A = \frac{1}{2}AB, \\
 &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB].
 \end{aligned}$$

Exercice 14 : Les questions sont indépendantes.

1. Donner l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 3)$ et $B(-1; -2)$. Même question avec $A(3; 3)$ et $B(2; 1)$.
2. Donner l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC où $A(1; 0)$, $B(0; 2)$ et $C(3; 1)$.
3. Déterminer les équations des cercles passant par $A(1; 1)$, $B(2; 2)$ et tangents à (Ox) .

V.2 Intersection d'une droite et d'un cercle

Proposition 22 :

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$.

1. Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts.

On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.

2. Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un unique point.

On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont tangents.

3. Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) > R$ alors $\mathcal{C} \cap (\mathcal{D}) = \emptyset$.

On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont extérieurs.

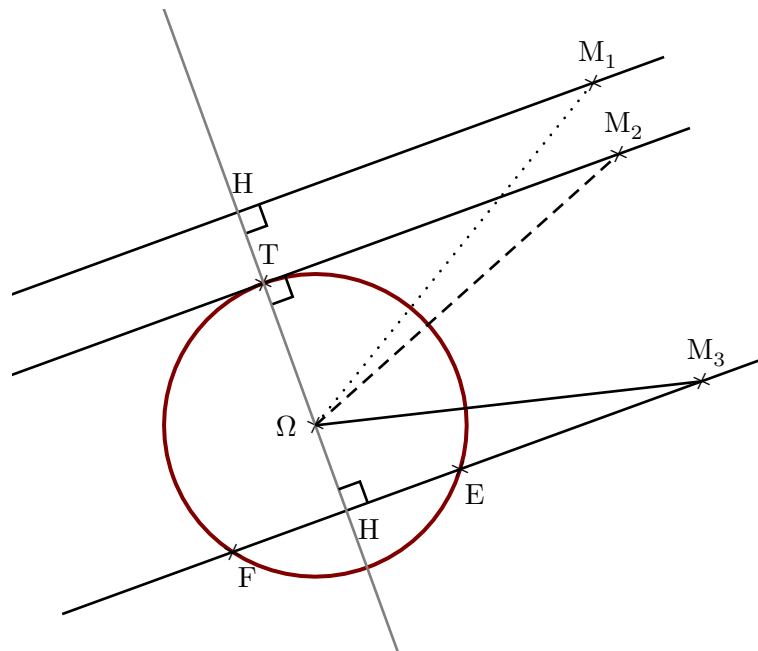


Figure XXXI.15 – Intersection d'une droite et d'un cercle.

Preuve : Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R , $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathcal{D})$ i.e. $\Omega H = d(\Omega; (\mathcal{D}))$.

Pour tout point M de $(\mathcal{D})$, le triangle $\Omega H M$ est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\Omega H^2 + H M^2 = \Omega M^2 \iff H M^2 = \Omega M^2 - \Omega H^2.$$

D'où,

$$M \in \mathcal{C} \iff \Omega M = R \implies H M^2 = R^2 - \Omega H^2. \quad (\text{XXXI.4})$$

1. Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) > R \iff R^2 - \Omega H^2 < 0$ alors XXXI.4 n'a pas de solution et $\mathcal{C} \cap (\mathcal{D}) = \emptyset$.
2. Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R \iff H M^2 = R^2 - \Omega H^2 = 0$ alors $M = H$: $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un seul point T .
3. Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$ alors XXXI.4 a deux points E et F solutions vérifiant $H M = \sqrt{R^2 - \Omega H^2}$.

Dans le cas de 2, on redémontre, en particulier, que la tangente à un cercle est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Exercice 15 : On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0$ et le point $A(2; 3)$.

1. Pourquoi A est-il extérieur à $\mathcal{C}$?
2. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point A .

Correction :

1. $x^2 + y^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 = \frac{3}{5}$. $\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(1; 0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Comme $A\Omega = \sqrt{10} > \sqrt{\frac{3}{5}}$, le point A est extérieur au cercle.

2. Cherchons d'abord les points d'intersection entre les tangentes (T_A) issues de A et le cercle $\mathcal{C}$.

Un tel point $M(x; y)$ correspond si, et seulement si il appartient au cercle et si le rayon (ΩM) est perpendiculaire à la tangente (T_A) :

$$\begin{aligned} M \in (T_A) \cap \mathcal{C} &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0 \\ \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0 \\ (x-1)(x-2) + y(y-3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0 \\ x + 3y - \frac{8}{5} = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &\iff \begin{cases} 10y^2 - \frac{18}{5}y - \frac{6}{25} = 0 \\ x = \frac{8}{5} - 3y \end{cases} \iff \begin{cases} 125y^2 - 45y - 3 = 0 \\ x = \frac{8}{5} - 3y \end{cases} \end{aligned}$$

On résout alors la première équation de discriminant $\Delta = 3525$ et de racines $y_1 = \frac{9 + \sqrt{141}}{50}$ et $y_2 = \frac{9 - \sqrt{141}}{50}$.

On trouve alors les deux points d'intersection

$$I_1 = \left(\frac{53 + 3\sqrt{141}}{50}; \frac{9 - \sqrt{141}}{50} \right) \quad \text{et} \quad I_2 = \left(\frac{53 - 3\sqrt{141}}{50}; \frac{9 + \sqrt{141}}{50} \right).$$

Il ne reste plus qu'à trouver l'équation des droites (AI_1) et (AI_2) .

— (AI_1) passe par $A(2; 3)$ et a pour vecteur normal $50\overrightarrow{\Omega I_1} = (3 + 3\sqrt{141}; 9 - \sqrt{141})$. D'où,
 $(AI_1) : (1 + \sqrt{141})x + \left(3 - \frac{1}{3}\sqrt{141}\right)y - 11 - \sqrt{141} = 0.$

— (AI_2) passe par $A(2;3)$ et a pour vecteur normal $50\overrightarrow{\Omega I_2} = (3 - 3\sqrt{141}; 9 + \sqrt{141})$. D'où,
 $(AI_2) : (1 - \sqrt{141})x + \left(3 + \frac{1}{3}\sqrt{141}\right)y - 11 + \sqrt{141} = 0$.

V.3 Intersection de deux cercles

Proposition 23 :

Soient deux cercles $\mathcal{C}(\Omega; R)$ et $\mathcal{C}'(\Omega'; R')$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset \iff |R - R'| \leq d(\Omega; \Omega') \leq R + R'.$$

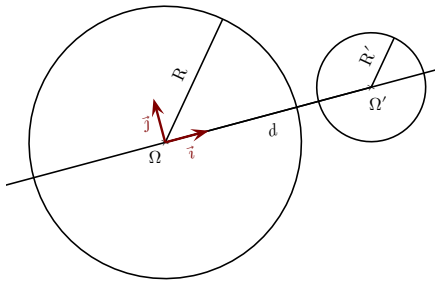


Figure XXXI.16 – $d(\Omega; \Omega') > R + R'$.

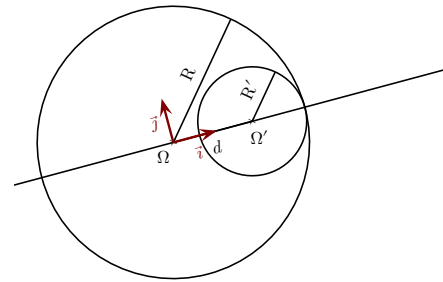


Figure XXXI.19 – $d(\Omega; \Omega') = |R - R'|$.

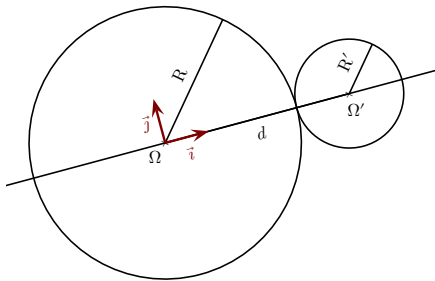


Figure XXXI.17 – $d(\Omega; \Omega') = R + R'$.

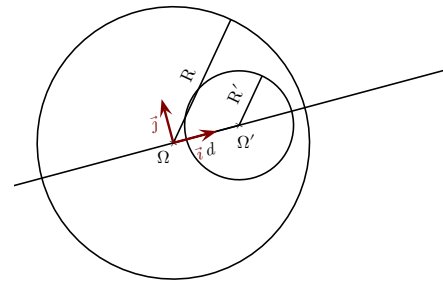


Figure XXXI.20 – $0 < d(\Omega; \Omega') < |R - R'|$.

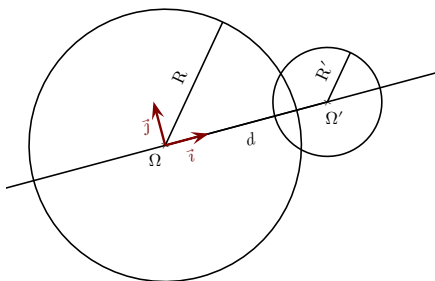


Figure XXXI.18 – $|R - R'| < d(\Omega; \Omega') < R + R'$.

Figure XXXI.21 – Positions relatives de deux cercles.

Preuve : Soient deux cercles $\mathcal{C}(\Omega; R)$ et $\mathcal{C}'(\Omega'; R')$ de centres distincts.

Posons $d = \Omega\Omega'$ et plaçons nous dans le repère direct $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{d}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

Dans ce repère, $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $\mathcal{C}'$ a pour équation $(x - d)^2 + y^2 = R'^2$.

Soit x et y deux réels. On a :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - d)^2 + y^2 = R'^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2dx = R'^2 - d^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \frac{R^2 - R'^2 + d^2}{2d} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système exprime le fait que déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ revient à déterminer $\mathcal{C} \cap (\mathcal{D})$ où $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $x = \frac{R^2 - R'^2 + d^2}{2d}$.

$$\text{Or, } d(\Omega; (\mathcal{D})) = \frac{|R^2 - R'^2 + d^2|}{2d}.$$

D'après la **proposition (22)**,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cap (\mathcal{D}) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \frac{|R^2 - R'^2 + d^2|}{2d} < R \Leftrightarrow |R^2 - R'^2 + d^2| < 2dR \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - R'^2 + d^2 < 2dR \\ R^2 - R'^2 + d^2 > -2dR \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (R - d)^2 < R'^2 \\ (R + d)^2 > R'^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |R - d| < R' \\ R + d > R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -R' < R - d < R' \\ R + d > R' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d < R + R' \text{ et } R - R' < d \\ d > R' - R \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d < R + R' \\ |R - R'| < d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow |R - R'| < d < R + R'. \end{aligned}$$

Exercice 16 : On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 100 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0.$$

1. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents et préciser si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents intérieurement ou extérieurement.
2. Déterminer une équation de la tangente au point de contact.



- Aire
 - d'un parallélogramme, 15
 - d'un triangle, 16
- Angle
 - calcul de la mesure d', 7
- Base
 - directe, 13
 - du plan, 2
 - indirecte, 13
 - orientée, 2
 - polaire, 6
- Bilinéarité, 16
- Cercle, 28
- Coefficient
 - directeur, 24
- Combinaison
 - linéaire, 2
- Coordonnées
 - cartésiennes, 3
 - d'un point, 3
 - d'un vecteur, 3
 - polaires, 4
- Disque, 29
- Distance
 - d'un point à une droite, 25
- Droite, 18
 - orthogonale, 24
 - parallèle, 24
- Déterminant, 13
- Égalité
 - de Lagrange, 16
- Équation
 - cartésienne
 - d'une droite, 20, 26
 - normale
 - d'une droite, 23
 - paramétrique
 - d'une droite, 18, 26
 - réduite de droite, 23
- Forme
 - alternée, 16
- Humour, 1
- Intersection
 - Cercle et droite, 31
 - de deux cercles, 33
- Lagrange
 - Identité de, 16
- Module, 4
- Norme, 2
 - d'un vecteur, 7
- Ordonnée
 - à l'origine, 24
- Origine
 - d'un repère, 2
- Parallélogramme, 15
- Position relative, 31, 33
- Produit
 - mixte, 13, 16
 - scalaire, 2, 7, 12
- Pôle
 - d'un repère, 4
- Relation
 - d'Al-Kashi, 12
- Repère
 - affine, 2
 - cartésien
 - du plan, 2
 - direct, 2
 - indirect, 2
 - orthogonal, 2
 - orthonormal, 2
 - polaire
 - du plan, 6
- Tangente
 - à un cercle, 31
- Théorème
 - de Pythagore, 31
- Vecteur
 - colinéaire, 7, 13
 - coordonnées, 3
 - directeur, 18
 - normal, 21, 23
 - nul, 7, 13
 - orthogonal, 7, 13

