Chapitre

XXXI Géométrie du plan

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?

Un ours polaire … après changement de coordonnées !

CONTENU

Dans tout le chapitre, on note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan. Tous deux seront désignés par le terme de plan : vectoriel ou affine c'est selon.

I/ Repérage des points et des vecteurs du plan

I.1 Repères cartésiens

Définition 1 :

— On appelle *base* du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tout couple de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ étant non colinéaires.

Tout vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ où } (x\,;y) \in \mathbb{R}^2. \tag{XXXI.1}$$

— On appelle *repère* (cartésien ou affine) du plan $\mathscr{P}$ tout triplet $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$, où O est un point du plan $\mathscr{P}$. On l'appelle alors *origine* du repère.

Remarque : $\vec{u}$ est donc une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

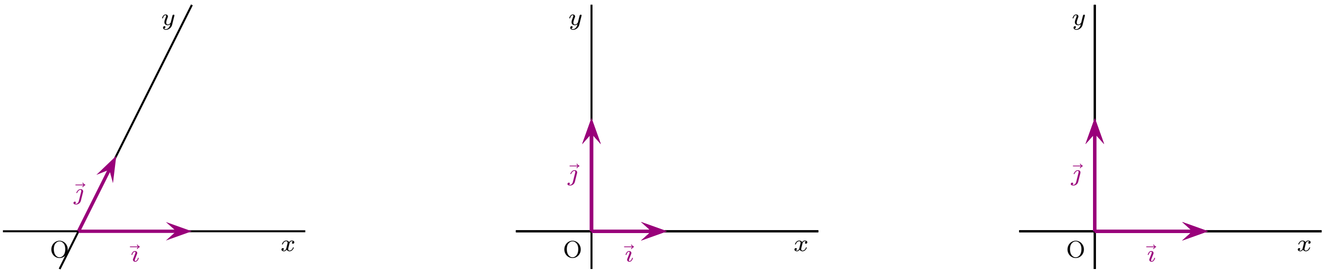


Figure XXXI.1 – Repères du plan.

Cas particuliers :

— Le repère et la base sont dits *orthogonaux* si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.

Si de plus, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits *orthonormés* ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.

— Dans ce dernier cas, si on a défini une orientation du plan, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont dits :

- ⋄ directs si $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) \equiv +\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- ⋄ indirects si $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Dans tous les exercices de ce chapitre et sauf mention contraire, on se placera dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ orthonormé direct du plan $\mathscr{P}$.

CHAPITRE XXXI. GÉOMÉTRIE DU PLAN

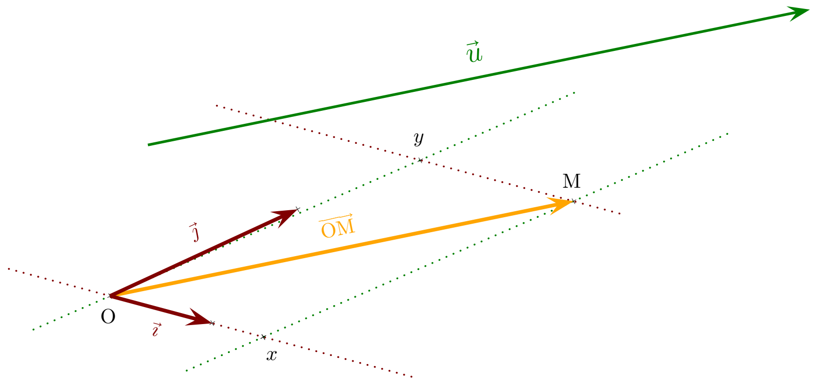


Figure XXXI.2 – Coordonnées de vecteurs et de points dans le plan.

En particulier, pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ où } (x\,;y) \in \mathbb{R}^2. \tag{XXXI.2}$$

Définition 2 (Coordonnées cartésiennes) :

— Soient $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (XXXI.1).

— On appelle *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $\mathrm{M}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (XXXI.2).

ATTENTION Les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.

Rappel 1 (Coordonnées de vecteurs) : Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

— Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

— $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et, dans un repère orthonormé :

$\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

— Si I est le milieu de [AB] alors $\mathrm{I}\left(\frac{x_B + x_A}{2}\,;\frac{y_B + y_A}{2}\right)$.

Exercice 1 : Soit ABCD un carré de centre O et G tel que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O et G dans :

1. $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$
2. $\left(\mathrm{B}\,;\overrightarrow{\mathrm{BG}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)$

I.2 Coordonnées polaires

Définition 3 : Soit M un point de $\mathscr{P}$.

On appelle *coordonnées polaires* de M, notées $[\rho\,;\theta]$ tout couple de réels $(\rho\,;\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\cos(\theta)\vec{\imath} + \rho\sin(\theta)\vec{\jmath}.$$

Le point O est alors appelé le *pôle* du repère.

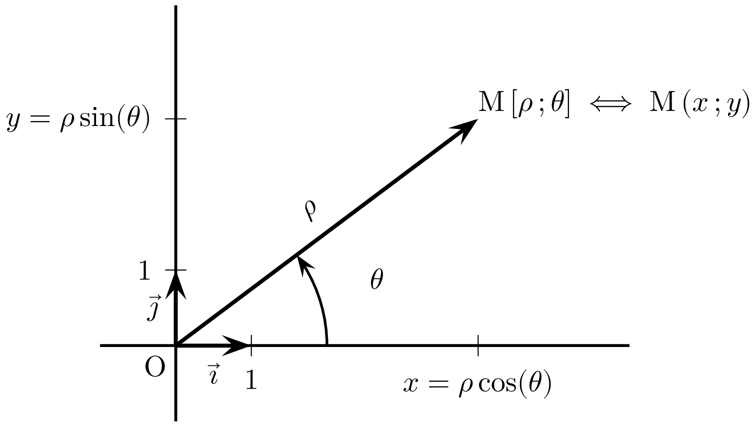


Figure XXXI.3 – Coordonnées polaires et cartésiennes d'un point.

Remarques :

— Si $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on peut prendre $\rho = \mathrm{OM}$ et $\theta = \left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi]$.

— Si $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, $\rho = 0$ suffit à repérer le point M.

Exercice 2 : Représenter les points A $\left[2\,;\frac{\pi}{3}\right]$, B $\left[1\,;\frac{13\pi}{6}\right]$ C $\left[-3\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et D $\left[3\,;\frac{5\pi}{4}\right]$.

Proposition 1 (Formules de passage) :
Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ et de coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$.

On a alors :

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Et pour $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on a alors (par exemple) :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et } \theta \text{ défini par } \begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$$

Exemple 1 : $(2\,;2) \equiv \left[2\sqrt{2}\,;\dfrac{\pi}{4}\right] \equiv \left[-2\sqrt{2}\,;\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

Définition 4 (Repère polaire) : Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{v_\theta} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$.

La *base polaire* associée à l'angle θ est le couple $(\overrightarrow{u_\theta}\,;\overrightarrow{v_\theta})$.

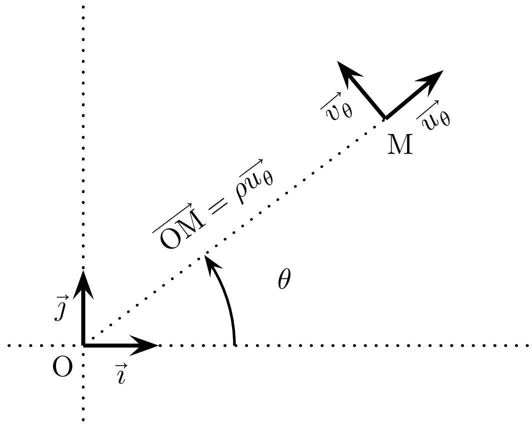


Figure XXXI.4 – Repère polaire.

Dans cette base $(\overrightarrow{u_\theta}\,;\overrightarrow{v_\theta})$, on a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\overrightarrow{u_\theta}$.

II/ Produit scalaire

Où va un angle quand il est malade ?
- Chez le vecteur.

II.1 Généralités

Rappel 2 (Norme d'un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) :

— Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et deux points A et B de $\mathscr{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

— Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée et $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Définition 5 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », le réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})\,. \tag{P.S 1}$$

— Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque : Comme la fonction cos est paire, le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation du plan.

Corollaire 1.1 (Mesure d'un angle) :

Si $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$ alors $\cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

Rappel 3 (Vecteurs colinéaires et alignement) :

— Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.

— Trois points A, B et C sont alignés $\iff$ $\exists k \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Proposition 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

II.2 Produit scalaire et projection orthogonale

Proposition 3 :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Soit O un point du plan $\mathscr{P}$ et soient A, B de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

On note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \begin{cases} \mathrm{OA} \times \mathrm{OH} & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens.} \\ -\mathrm{OA} \times \mathrm{OH} & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$

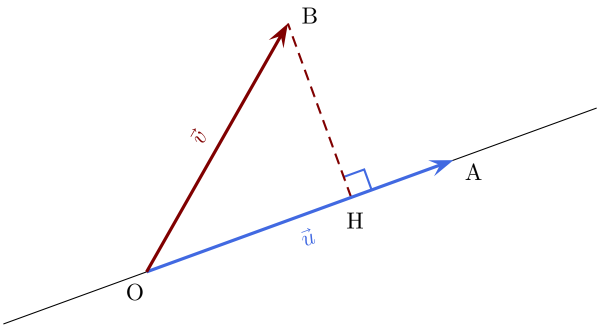


Figure XXXI.5 – Produit scalaire et projection orthogonale.

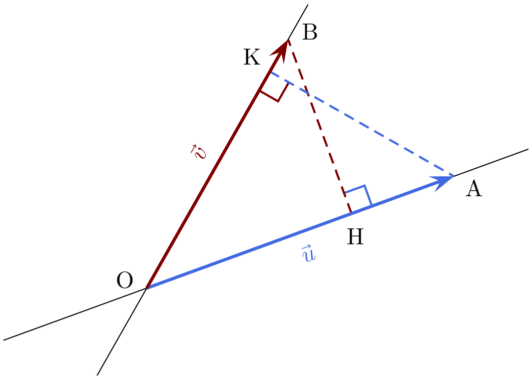


Figure XXXI.6 – $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OB}$.

II.3 Expressions du produit scalaire

Proposition 4 (Relation de Pythagore) :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Alors :
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right). \tag{P.S 2}$$

Proposition 5 :
Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée.

Soient $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ où $((x\,;y)\,;(x'\,;y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

Alors :
$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'. \tag{P.S 3}$$

Exercice 3 : Soit ABC un triangle tel que AB $= 4$, AC $= 5$ et BC $= 6$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ arrondie au degré près.

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= xx' + yy' \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \vec{u}.\vec{v_1}\end{aligned}$$

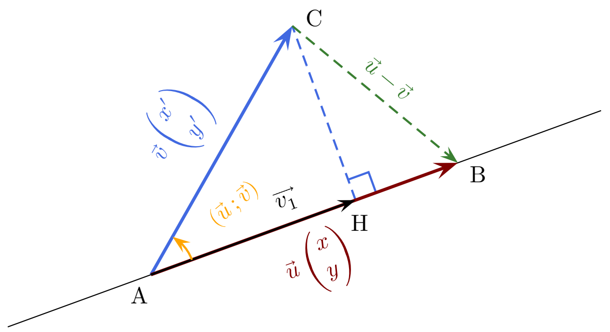


Figure XXXI.7 – Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan.

II.4 Propriétés algébriques

Proposition 6 :
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$. (Le produit scalaire est positif).

   On note alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$.
2. $\vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$. (Le produit scalaire est défini).
3. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (Le produit scalaire est symétrique).
4. $\begin{aligned}(\alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2}).\vec{v} &= \alpha\vec{u_1}.\vec{v} + \beta\vec{u_2}.\vec{v} \\ \vec{u}.(\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2}) &= \alpha\vec{u}.\vec{v_1} + \beta\vec{u}.\vec{v_2}\end{aligned}$ (Le produit scalaire est linéaire à gauche et à droite).

5. $$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 .$$ (Identités remarquables).
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 .$$
$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 .$$

On dit alors que l'application

$$\begin{array}{rccl} \cdots . \cdots : & \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$$

est une forme bilinéaire (4), symétrique (3), définie (2), positive (1).

Exercice 4 (Droite d'Euler dans le triangle) : Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H l'orthocentre de ABC.

1. (a) Notons A ' le milieu de [BC]. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.
   (b) Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
3. Démontrer que les points O, G et H sont alignés.

III/ Produit mixte

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une orientation.

Définition 6 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On appelle *produit mixte* (ou *déterminant*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}\,;\vec{v}]$, le réel défini par :

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,
$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\,;\vec{v}) . \qquad \text{(P.M 1)}$$
— Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.

ATTENTION La fonction sinus étant impaire, le produit mixte dépend de l'orientation du plan. Un changement d'orientation du plan change le signe le signe du produit mixte.

Proposition 7 :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarques : Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) = \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Dans ce cas, on a alors :

- $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = 1$ si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est directe.
- $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = -1$ si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est indirecte.

En particulier,

Corollaire 7.1 :

$$\forall\, \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \quad [\vec{u}\,;\vec{u}] = 0.$$

III.1 Expressions du produit mixte

Proposition 8 :
Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée directe.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où $(x\,;y)\,,(x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = xy' - x'y. \tag{P.M 2}$$

Notation En notant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$, la relation (P.M 2) s'écrit :

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

ATTENTION | L'égalité (P.M 2) n'a lieu que dans une base orthonormée directe.

III.2 Interprétation géométrique du produit mixte

Proposition 9 :
Soient A, B et C trois points de $\mathscr{P}$ et D tel que $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Alors, $\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right]\right|$ est l'aire du parallélogramme ABDC :

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ABDC}} = \left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right]\right|.$$

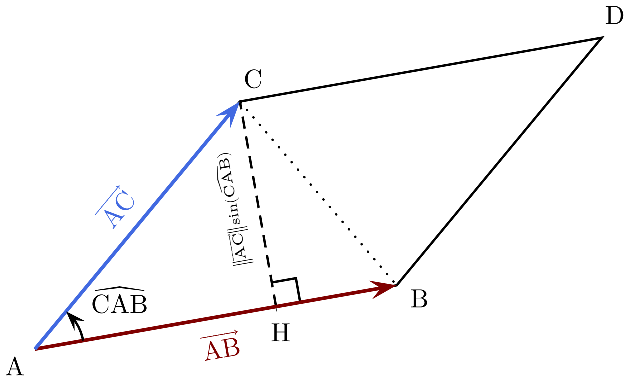


Figure XXXI.8 – $\left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right| = \mathcal{A}_{ABDC}$ où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Corollaire 9.1 :
Soient A, B, et C trois points du plan $\mathscr{P}$. Alors l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Exercice 5 : On donne $A(1,2), B(2,3), C(6,1)$ et $D(3,0)$ dans un repère orthonormé direct.

1. Quelle est l'aire de ABC ?
2. Justifier que ABD est rectangle en A.

III.3 Propriétés algébriques

Proposition 10 :
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\vec{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $[\vec{u}\,;\vec{v}] = -[\vec{v}\,;\vec{u}]$ (Le produit mixte est anti-symétrique ou alterné).
2. $[\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}] = \alpha\,[\overrightarrow{u_1}\,;\vec{v}] + \beta\,[\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}]$
   $[\vec{u}\,;\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}] = \alpha\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_1}] + \beta\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_2}]$ (Le produit mixte est linéaire à gauche et à droite).
3. $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + [\vec{u}\,;\vec{v}]^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$. (Identité de Lagrange).

On dit alors que l'application

$$\begin{array}{rccl} [\cdot\,;\cdot] : & \vec{\mathcal{P}}\times\vec{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & [\vec{u}\,;\vec{v}] \end{array}$$

est une forme bilinéaire (2) alternée (1).

Exercice 6 : Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer les triangles GAB, GBC et GAC ont la même aire.

Proposition 11 :
Soient $\mathscr{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base **quelconque**.

Deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathscr{B}}$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')_{\mathscr{B}}$ sont colinéaires si, et seulement si $xy' - x'y = 0$.

ATTENTION Dans une base quelconque $[\vec{u}\,;\vec{v}] \neq \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

IV/ Droites du plan

Dans cette partie, sauf mention contraire, on considèrera $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ un repère quelconque de $\mathscr{P}$.

IV.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 7 (Vecteur directeur) : Soit $(\mathscr{D})$ une droite du plan.

On appelle *vecteur directeur* de $(\mathscr{D})$ tout vecteur non nul $\vec{u}$, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ où A et B sont deux points distincts de $(\mathscr{D})$.

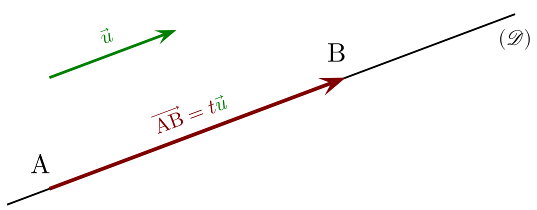


Figure XXXI.9 – Vecteur directeur d'une droite.

IV.2 Équations paramétriques de droites

Proposition 12 :
La droite $(\mathscr{D})$ passant par $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0\,;0)\,\}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Ce système est appelé équation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$.

Remarques :

- Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si $M = A + \mathrm{vect}(\vec{u})$.
- En particulier, le couple $(A, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathscr{D})$. Le paramètre t est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.

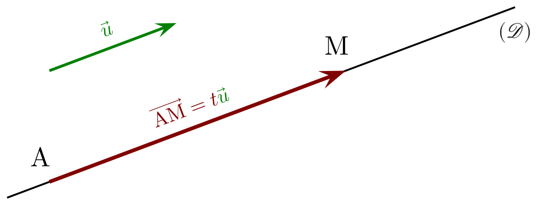


Figure XXXI.10 – Droite $(\mathscr{D})$ passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

Exercice 7 : Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) avec :

1. $A(1\,;3)$ et $B(-1\,;2)$.
2. $A(1\,;-3)$ et $B(4\,;-3)$.

IV.3 Équations cartésiennes d'une droite

Proposition 13 :

1. Toute droite $(\mathscr{D})$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

   Cette équation est appelée *équation cartésienne* de la droite $(\mathscr{D})$.
2. Réciproquement, soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ alors l'ensemble des points $M(x\,;y)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite $(\mathscr{D})$ dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Résoudre graphiquement les systèmes :

1. $\begin{cases} x + y \geqslant 0 \\ x - y \leqslant 1 \\ x + 2y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x^2 - y^2 \geqslant 0 \\ y^2 - 1 \leqslant 0 \end{cases}$

Définition 8 (Vecteur normal) : On appelle *vecteur normal* d'une droite $(\mathscr{D})$, tout vecteur non nul orthogonal aux vecteurs directeurs de $(\mathscr{D})$.

Proposition 14 :
Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.

1. Toute droite admet une équation du type $ax+by+c=0$ dont $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.
2. Réciproquement, soient trois réels a, b et c tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

   L'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple 2 (Droite définie par deux points distincts) :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) où $\mathrm{A}\,(1\,;3)$ et $\mathrm{B}\,(-1\,;2)$.

Comme $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2\,;1)$ est un vecteur directeur de (AB) alors tout point

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y) \in (\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ sont colinéaires.}\\
&\iff \begin{vmatrix} x-1 & 2\\ y-3 & 1\end{vmatrix} = 0\\
&\iff (x-1)-2(y-3)=0\\
&\iff x-2y+5=0.
\end{aligned}$$

Donc, $(\mathrm{AB}) : x-2y+5=0$.

Exemple 3 (Droite définie par un point et un vecteur normal) : Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}\,(1\,;3)$, $\mathrm{B}\,(-1\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(-3\,;-4)$.

Dans le triangle ABC, déterminons une équation cartésienne de la hauteur issue de A. Soit $(\mathscr{D})$ cette droite.

La droite $(\mathscr{D})$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A *i.e.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y) \in (\mathscr{D}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux.}\\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0\\
&\iff \begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0\\
&\iff (x-1)+3(y-3)=0\\
&\iff x+3y-10=0
\end{aligned}$$

Donc, une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $x+3y-10=0$.

Définition 9 (Équation normale d'une droite) : Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation

$$ax + by + c = 0.$$

L'équation de $(\mathscr{D})$ est dite *normale* si $a^2 + b^2 = 1$ *i.e.* $\|\vec{n}\| = 1$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarques :

— La condition $a^2 + b^2 = 1$ sous-entend que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

— Pour tout vecteur de norme 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n} = (\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$. On retrouve alors souvent des équation de droite, dites *normale*, sous la forme :

$$(\mathscr{D}) : \; x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = d.$$

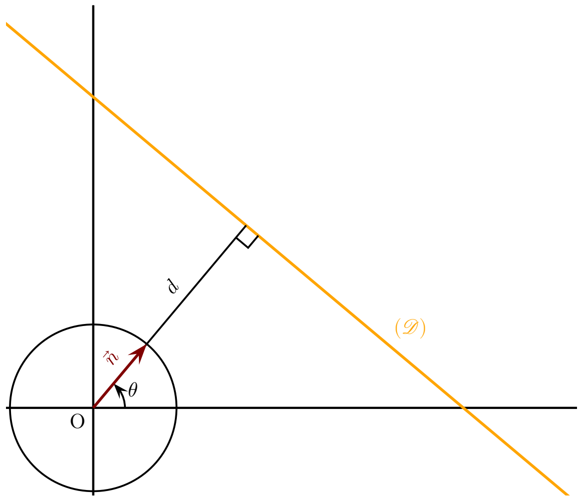


Figure XXXI.11 – Équation normale d'une droite.

Exercice 9 : On considère les points A $(5\,;3)$, B $(1\,;-3)$ et C $(-3\,;4)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

IV.4 Équation réduite d'une droite

Proposition 15 :
Soient $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ un repère quelconque et $(\mathscr{D})$ une droite.

Alors :

1. Si $(\mathscr{D})$ est parallèle à l' axe $(\mathrm{O}, \vec{\jmath})$ alors $(\mathscr{D})$ admet une équation de la forme

$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Si $(\mathscr{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}, \vec{\jmath})$ alors $(\mathscr{D})$ admet une équation de la forme

$$y = mx + p \quad \text{où} \quad (m\,;p) \in \mathbb{R}^2.$$

— m s'appelle le *coefficient directeur* de la droite
— et p son *ordonnée à l'origine*.

Remarque : Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ quelconque, soient deux points $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}\,(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ tels que $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$ de sorte que (AB) ne soit pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}, \vec{\jmath})$.

Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$.

Proposition 16 :
1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si leur coefficient directeur sont égaux.
2. Deux droites sont orthogonales si, et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 dans un repère orthonormé.

Plus précisément, si $(\mathscr{D}) : y = mx + p$ et $(\mathscr{D}') : y = m'x + p'$ alors :
1. $(\mathscr{D}) \mathbin{/\!/} (\mathscr{D}') \iff m = m'$.
2. $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \iff mm' = -1$ si $\mathscr{R}$ est orthonormé.

Exercice 10 : On considère les droites $(\mathscr{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathscr{D}') : 3x - y = 1$.

On note $\mathrm{B}\,(5\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(2\,;-7)$.
1. Justifier que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.
2. Donner une équation cartésienne de (AB).
3. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par B.
4. Donner une équation cartésienne de la parallèle à $(\mathscr{D})$ passant par B.
5. Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

   Cette médiatrice est-elle parallèle à $(\mathscr{D})$? à $(\mathscr{D}')$?

IV.5 Distance d'un point à une droite

Définition 10 : Soient $(\mathscr{D})$ une droite et A un point du plan $\mathscr{P}$.

On appelle *distance* du point A à la droite $(\mathscr{D})$, noté $\mathrm{d}\,(\mathrm{A}\,;(\mathscr{D}))$, la plus petite des distances AM lorsque le point M parcourt la droite $(\mathscr{D})$:

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{A}\,;(\mathscr{D})) = \inf\left\{\mathrm{AM}\,/\,\mathrm{M} \in (\mathscr{D})\right\}.$$

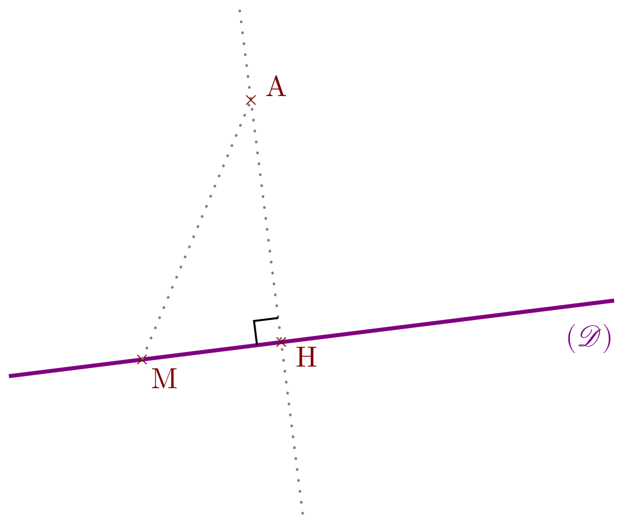


Figure XXXI.12 – $d\,(\mathrm{A}\,;(\mathscr{D})) = \mathrm{AH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$.

Théorème 17 :
Soient $(\mathscr{D})$ une droite et A un point du plan $\mathscr{P}$.

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{A}\,;(\mathscr{D})) = \mathrm{AH} \iff \text{H est le projeté orthogonal de A sur } (\mathscr{D}).$$

Exercice 11 : Soit ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur de ABC.

Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés de ABC ne dépend pas de M.

Proposition 18 (Calcul de la distance d'un point à une droite) :
Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ un repère quelconque.

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur directeur : Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ alors :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})) = \frac{\left|\left[\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right]\right|}{\|\vec{u}\|}.$$

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur normal : Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point A, de vecteur normal $\vec{n}$ et soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ alors :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

CHAPITRE XXXI. GÉOMÉTRIE DU PLAN

Corollaire 18.1 (Cas d'une droite définie par une équation cartésienne dans un RON) :
Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Pour tout point $\mathrm{M}\,(x_\mathrm{M}\,;y_\mathrm{M}) \in \mathscr{P}$, on a :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})) = \frac{|ax_\mathrm{M} + by_\mathrm{M} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 12 : Calculer la distance du point $\mathrm{A}\,(-2\,;-1)$ à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $3x + 4y - 5 = 0$.

V/ Cercles du plan

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ **orthonormé** du plan $\mathscr{P}$.

V.1 Équations cartésiennes de cercles

Proposition 19 :
Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathscr{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

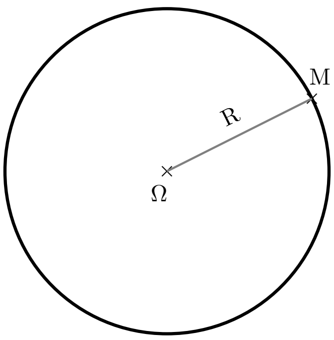


Figure XXXI.13 – Cercle de centre Ω et de rayon R.

Remarques : On appelle *disque* de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathscr{D} = \left\{\mathrm{M}\,(x\,;y)\ /\,(x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}.$$

Plus particulièrement,

— $M(x\,;y)$ est strictement à l'extérieur du cercle $\mathscr{C} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2 > R^2$.

— $M(x\,;y)$ est strictement à l'intérieur du cercle $\mathscr{C} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2 < R^2$.

Proposition 20 :
Soient a, b et c des réels et $\mathscr{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

— Si $c < a^2+b^2$ alors $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

— Si $c = a^2+b^2$ alors $\mathscr{C}$ est réduit au point $\Omega(a\,;b)$.

— Si $c > a^2+b^2$ alors $\mathscr{C}$ est vide.

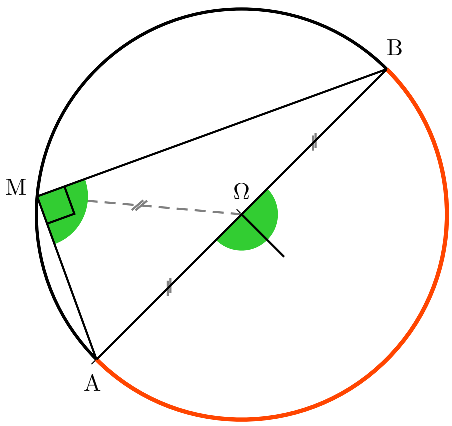
Exercice 13 : Soit $\mathscr{R} = \left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque.

Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ défini par :

$$x^2+y^2+4x-6y-12=0.$$

Proposition 21 :
Soient A et B deux points distincts du plan $\mathscr{P}$.

Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.



Un triangle est rectangle si, et seulement si un de ses côtés est le diamètre de son cercle circonscrit.

Figure XXXI.14 – Théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle (Théorème de Thalès anglo-saxon).

Exercice 14 : Les questions sont indépendantes.

1. Donner l'équation du cercle de diamètre [AB] avec $A(1\,;3)$ et $B(-1\,;-2)$. Même question avec $A(3\,;3)$ et $B(2\,;1)$.
2. Donner l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC où $A(1\,;0)$, $B(0\,;2)$ et $C(3\,;1)$.

3. Déterminer les équations des cercles passant par $A\,(1\,;1)$, $B\,(2\,;2)$ et tangents à (Ox).

V.2 Intersection d'une droite et d'un cercle

Proposition 22 :
Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R et $(\mathscr{D})$ une droite de $\mathscr{P}$.

1. Si $d\,(\Omega\,;(\mathscr{D})) < R$ alors $\mathscr{C}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en deux points distincts.

   On dit que $\mathscr{C}$ et $(\mathscr{D})$ sont sécants.
2. Si $d\,(\Omega\,;(\mathscr{D})) = R$ alors $\mathscr{C}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en un unique point.

   On dit que $\mathscr{C}$ et $(\mathscr{D})$ sont tangents.
3. Si $d\,(\Omega\,;(\mathscr{D})) > R$ alors $\mathscr{C} \cap (\mathscr{D}) = \emptyset$.

   On dit que $\mathscr{C}$ et $(\mathscr{D})$ sont extérieurs.

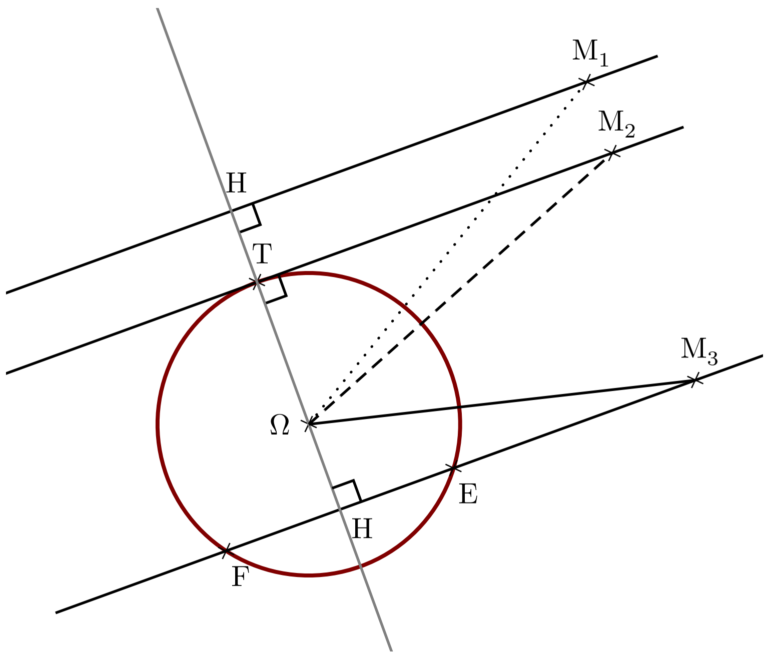


Figure XXXI.15 – Intersection d'une droite et d'un cercle.

Dans le cas de 2, on redémontre, en particulier, que la tangente à un cercle est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Exercice 15 : On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + \dfrac{2}{5} = 0$ et le point $A\,(2\,;3)$.

1. Pourquoi A est-il extérieur à $\mathcal{C}$?
2. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point A.

V.3 Intersection de deux cercles

Proposition 23 :
Soient deux cercles $\mathscr{C}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'\neq\emptyset \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|\leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')\leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$

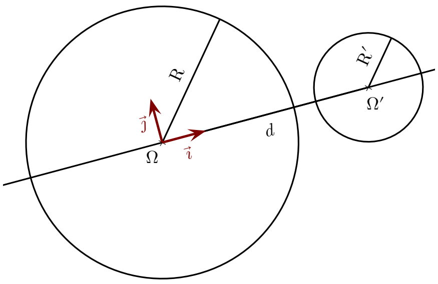


Figure XXXI.16 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')>\mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

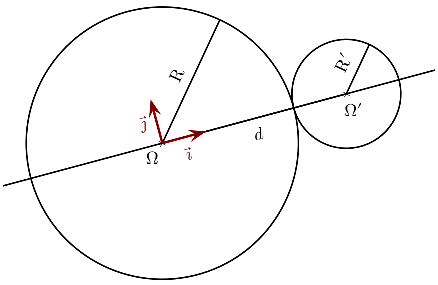


Figure XXXI.17 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=\mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

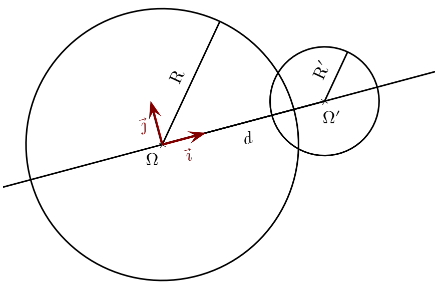


Figure XXXI.18 – $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|<\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')<\mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

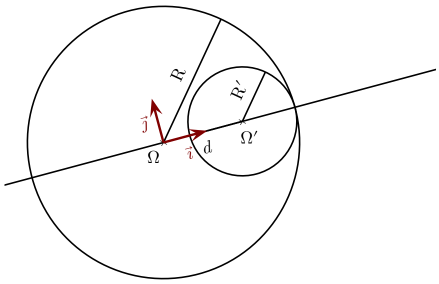


Figure XXXI.19 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$.

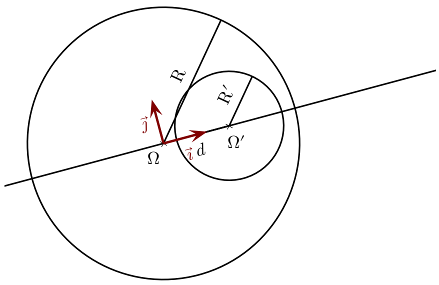


Figure XXXI.20 – $0<\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')<|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$.

Figure XXXI.21 – Positions relatives de deux cercles.

Exercice 16 : On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$\mathcal{C}_1\,:\; x^2+y^2=100 \quad\text{et}\quad \mathcal{C}_2\,:\; x^2+y^2-24x-18y+200=0.$$

1. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents et préciser si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents intérieurement ou extérieurement.
2. Déterminer une équation de la tangente au point de contact.


master may i ask
a question
yes my padawan
@fresh.pince
what do you call this?
a triangle
@fresh.pince
there are no triangles
only do angles
dies of cringe