Géométrie du plan

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 31

Sommaire I

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?

Un ours polaire … après changement de coordonnées !

Ce premier chapitre de géométrie sera consacré à rappeler les principales définitions et propriétés relatives à la géométrie analytique dans le plan. Autrement dit, nous travaillerons toujours avec des coordonnées. La plupart des notions ont déjà été vues au lycée.

Nous ferons également un bilan de tout ce qu'il y a à savoir sur les deux types d'objets géométriques les plus simples et les plus couramment utilisés dans le plan : les droites et les cercles.

L'outil de base, et pourtant parfois délicat à manipuler, en géométrie, est l'équation d'un ensemble de points.

Dire que $\mathcal{E}$ est d'équation $f\,(x\,;y) = 0$ (alors $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble du plan) signifie que $\mathcal{E}$ est composé de tous les points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$, $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{E}$. Évidement, on peut et on adaptera cette définition à l'espace $\mathbb{R}^3$.

De manière évidente, tout ceci n'a du sens que lorsqu'on dispose d'un repère (origine + base) pour exprimer les coordonnées, et l'équation de $\mathcal{E}$ dépend fortement du repère choisi pour l'exprimer, même si la forme (l'ensemble des points) ne change pas.

De manière évidente, tout ceci n'a du sens que lorsqu'on dispose d'un repère (origine + base) pour exprimer les coordonnées, et l'équation de $\mathcal{E}$ dépend fortement du repère choisi pour l'exprimer, même si la forme (l'ensemble des points) ne change pas.

Dans tout le chapitre, on note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan. Tous deux seront désignés par le terme de plan : vectoriel ou affine c'est selon.

I. Repérage des points et des vecteurs du plan

Définition 1 :

- On appelle base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tout couple de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ étant non colinéaires.
  Tout vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ s'écrit alors de manière unique sous la forme
  $$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ où } (x\,;y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

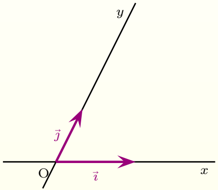
Définition 1 :

- On appelle base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tout couple de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ étant non colinéaires.
  Tout vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ s'écrit alors de manière unique sous la forme
  $$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ où } (x\,;y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$
- On appelle repère (cartésien ou affine) du plan $\mathcal{P}$ tout triplet $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, où O est un point du plan $\mathcal{P}$. On l'appelle alors origine du repère.

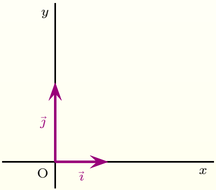
Définition 1 :

- On appelle base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tout couple de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ étant non colinéaires.
  Tout vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ s'écrit alors de manière unique sous la forme
  $$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad \text{où } (x\,;y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$
- On appelle repère (cartésien ou affine) du plan $\mathcal{P}$ tout triplet $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, où O est un point du plan $\mathcal{P}$. On l'appelle alors origine du repère.

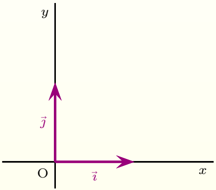
Remarque : $\vec{u}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormé

Figure 1 – Repères du plan.

Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits orthogonaux si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.
  Si de plus, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits orthonormés ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.

Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits orthogonaux si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.
  Si de plus, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits orthonormés ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.
- Dans ce dernier cas, si on a défini une orientation du plan, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont dits :

Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits orthogonaux si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.
  Si de plus, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits orthonormés ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.
- Dans ce dernier cas, si on a défini une orientation du plan, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont dits :
  - directs si $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) \equiv +\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits orthogonaux si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.
  Si de plus, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits orthonormés ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.
- Dans ce dernier cas, si on a défini une orientation du plan, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont dits :
  - directs si $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) \equiv +\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
  - indirects si $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits orthogonaux si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.
  Si de plus, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits orthonormés ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.
- Dans ce dernier cas, si on a défini une orientation du plan, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont dits :
  - directs si $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) \equiv +\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
  - indirects si $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Dans tous les exercices de ce chapitre et sauf mention contraire, on se placera dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$.

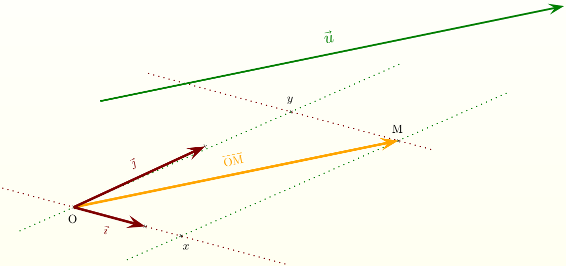


Figure 2 – Coordonnées de vecteurs et de points dans le plan.

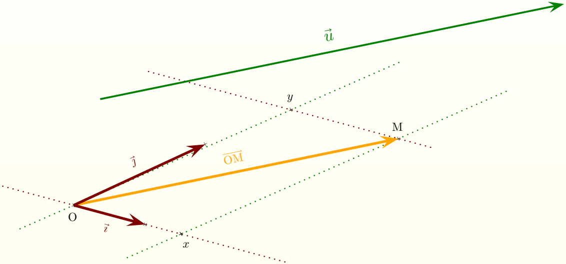


Figure 2 – Coordonnées de vecteurs et de points dans le plan.

En particulier, pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ où } (x\,;y) \in \mathbb{R}^2.$$

Définition 2 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (1).

Définition 2 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (1).
- On appelle coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $\mathrm{M}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (2).

Définition 2 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient $\mathscr{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathscr{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (1).
- On appelle coordonnées du point M dans le repère $\mathscr{R}$, notées $\mathrm{M}\,(x\,;y)_{\mathscr{B}}$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (2).

ATTENTION

Les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.

Définition 2 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (1).
- On appelle coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $\mathrm{M}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x\,;y)$ de la décomposition (2).

ATTENTION Les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.

Cette dernière définition constitue en fait une identification entre l'ensemble des points du plan, l'ensemble des vecteurs du plan, et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels.

Rappel (Coordonnées de vecteurs) :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Rappel (Coordonnées de vecteurs) :

Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ et, dans un repère orthonormé :
  $\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})^2}$.

Rappel (Coordonnées de vecteurs) :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ et, dans un repère orthonormé :
  $\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2}$.
- Si I est le milieu de [AB] alors $\mathrm{I}\left(\dfrac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}}{2}\,;\dfrac{y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{A}}}{2}\right)$.

Exercice 1 :

Soit ABCD un carré de centre O et G tel que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O et G dans :

1. $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 1 :

Soit ABCD un carré de centre O et G tel que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O et G dans :

1. $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$
2. $\left(B\,;\overrightarrow{BG}\,;\overrightarrow{AO}\right)$

Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues dans le chapitre sur les nombres complexes, le repérage cartésien (couple de coordonnées $(x\,;y)$) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\,b$, alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues dans le chapitre sur les nombres complexes, le repérage cartésien (couple de coordonnées $(x\,;y)$) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\,b$, alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Soit donc $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Étant donné un point $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on considère son affixe z.

z peut s'écrire sous forme exponentielle $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$ où $\rho = |z| = \mathrm{OM}$ est le module de z et $\theta \equiv \left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi]$ est un argument de z.

Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues dans le chapitre sur les nombres complexes, le repérage cartésien (couple de coordonnées $(x\,;y)$) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\,b$, alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Soit donc $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Étant donné un point $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on considère son affixe z.

z peut s'écrire sous forme exponentielle $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)\big)$ où $\rho = |z| = \mathrm{OM}$ est le module de z et $\theta \equiv \left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi]$ est un argument de z.

Ainsi, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\cos(\theta)\vec{\imath} + \rho\sin(\theta)\vec{\jmath}.$$

où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition 3 :

Soit M un point de $\mathcal{P}$.

On appelle coordonnées polaires de M, notées $[\rho\,;\theta]$ tout couple de réels $(\rho\,;\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\cos(\theta)\vec{\imath} + \rho\sin(\theta)\vec{\jmath}.$$

Le point O est alors appelé le pôle du repère.

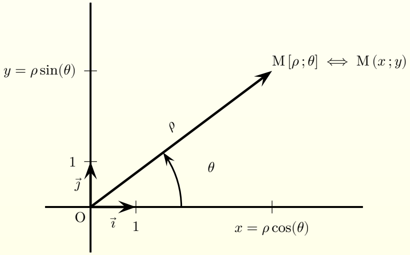


Figure 3 – Coordonnées polaires et cartésiennes d'un point.

Remarques :

- Si M $\neq$ O, on peut prendre $\rho = \mathrm{OM}$ et $\theta = \left(\vec{\imath}\,; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi]$.

Remarques :

- Si $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on peut prendre $\rho = \mathrm{OM}$ et $\theta = \left(\vec{\imath}\,; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi]$.
- Si $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, $\rho = 0$ suffit à repérer le point M.

Remarques :

- Si $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on peut prendre $\rho = \mathrm{OM}$ et $\theta = \left(\vec{\imath}\,; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\ [2\pi]$.
- Si $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, $\rho = 0$ suffit à repérer le point M.
- Dans la définition ci-dessus, rien n'empêche ρ d'être négatif.
  Dans ce cas, on aura alors $\mathrm{OM} = |\rho|$ et $\left(\vec{\imath}\,; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \equiv \theta + \pi\ [2\pi]$.

Remarques :

- Si $M \neq O$, on peut prendre $\rho = OM$ et $\theta = \left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.
- Si $M = O$, $\rho = 0$ suffit à repérer le point M.
- Dans la définition ci-dessus, rien n'empêche ρ d'être négatif.
  Dans ce cas, on aura alors $OM = |\rho|$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM}\right) \equiv \theta + \pi\ [2\pi]$.
- Tout point admet une infinité de coordonnées polaires :

$$M\left[1\,;\frac{\pi}{4}\right] \iff M\left[1\,;\frac{9\pi}{4}\right] \iff M\left[-1\,;\frac{5\pi}{4}\right] \iff \ldots$$

Exercice 2 :

Représenter les points A $\left[2\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$, B $\left[1\,;\dfrac{13\pi}{6}\right]$ C $\left[-3\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ et D $\left[3\,;\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

Proposition 1 (Formules de passage) :

Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ et de coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$.

On a alors :

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Proposition I (Formules de passage) :

Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ et de coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$.

On a alors :

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Et pour $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on a alors (par exemple) :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et } \theta \text{ défini par } \begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$$

Proposition 1 (Formules de passage) :

Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ et de coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$.

On a alors :

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Et pour $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$, on a alors (par exemple) :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et } \theta \text{ défini par } \begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$$

Les calculs de coordonnées polaires sont identiques à ceux effectués pour trouver la forme exponentielle d'un nombre complexe.

Exemple 1 :

$(2\,;2) \equiv \left[2\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right] \equiv \left[-2\sqrt{2}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$.

Exemple 1 :

$(2\,;2) \equiv \left[2\sqrt{2}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right] \equiv \left[-2\sqrt{2}\,;\,\dfrac{5\pi}{4}\right].$

Remarque : On peut également utiliser la fonction arctan mais dans ce cas il faut faire attention au quadrant dans lequel on se situe :

Si M est un point de coordonnées $(x\,;y)$ alors un couple $[\rho\,;\theta]$ de coordonnées polaires sera :

$$\rho = signe(x) \times \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Définition 4 (Repère polaire) :

Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{v_\theta} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$.

La base polaire associée à l'angle θ est le couple $(\overrightarrow{u_\theta}\,;\overrightarrow{v_\theta})$.

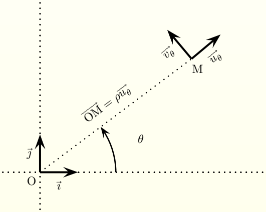


Figure 4 – Repère polaire.

Définition 4 (Repère polaire) :

Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{v_\theta} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$.

La base polaire associée à l'angle θ est le couple $(\overrightarrow{u_\theta}\,;\overrightarrow{v_\theta})$.

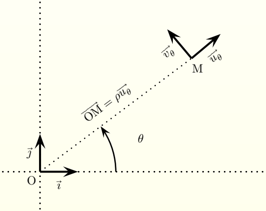


Figure 4 – Repère polaire.

Remarques :

- Dans cette base $(\overrightarrow{u_\theta}\,;\overrightarrow{v_\theta})$, on a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\overrightarrow{u_\theta}$.

Définition 4 (Repère polaire) :

Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{v_\theta} = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$.

La base polaire associée à l'angle θ est le couple $(\overrightarrow{u_\theta}\,;\overrightarrow{v_\theta})$.

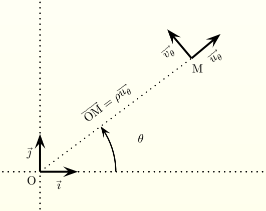


Figure 4 – Repère polaire.

Remarques :

- Dans cette base $(\overrightarrow{u_\theta}\,;\overrightarrow{v_\theta})$, on a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\overrightarrow{u_\theta}$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans le plan complexe, les affixes de $\overrightarrow{u_\theta}$ et de $\overrightarrow{v_\theta}$ sont respectivement $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Rappel (Norme d'un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) :

- Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et deux points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
  La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Rappel (Norme d'un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) :

- Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et deux points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
  La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.
- Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée et $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Définition 5 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », le réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right). \qquad \text{(P.S 1)}$$

Définition 5 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », le réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})\,. \tag{P.S 1}$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition 5 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », le réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right). \qquad \text{(P.S 1)}$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque : Comme la fonction cos est paire, le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation du plan.

Définition 5 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », le réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})\,. \tag{P.S 1}$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque : Comme la fonction cos est paire, le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation du plan.

Corollaire 1 (Mesure d'un angle) :

$$\text{Si } \vec{u}.\vec{v} \neq 0 \text{ alors } \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Rappel (Vecteurs colinéaires et alignement) :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.

Rappel (Vecteurs colinéaires et alignement) :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.

Rappel (Vecteurs colinéaires et alignement) :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.
- Trois points A, B et C sont alignés $\iff \exists k \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Proposition 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

II. Produit scalaire
1. Généralités

Proposition 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Proposition 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

Proposition 3 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$.

Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et soient A, B de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{v}$.

On note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \begin{cases} \mathrm{OA} \times \mathrm{OH} & \text{si } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \text{ sont de même sens.} \\ -\mathrm{OA} \times \mathrm{OH} & \text{si } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$

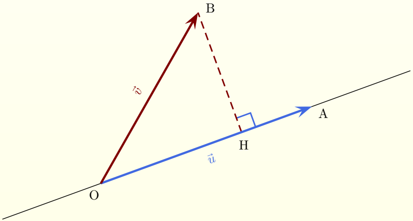


Figure 5 – Produit scalaire et projection orthogonale.

Remarque : On peut, bien sûr, considérer le projeté orthogonal de A sur (OB) et d'obtenir $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

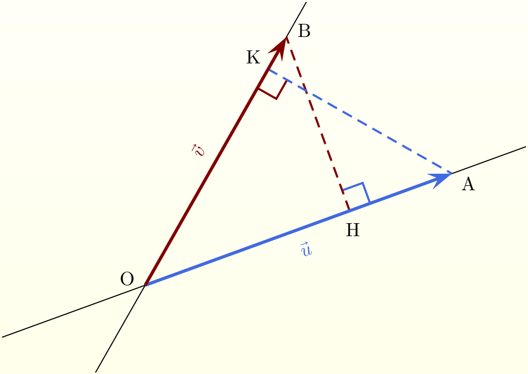


Figure 6 – $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

Proposition 4 (Relation de Pythagore) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right). \qquad \text{(P.S 2)}$$

Proposition 4 (Relation de Pythagore) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right). \tag{P.S 2}$$

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{P}$.

Pour $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$, et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on reconnaîtra en (P.S 2), le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle en A} &\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ &\iff \left\|-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \\ &\iff BC^2 = AB^2 + AC^2. \end{aligned}$$

Proposition 5 :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée.

Soient $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ où $((x\,;y)\,;(x'\,;y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'. \qquad \text{(P.S 3)}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= xx' + yy' \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \vec{u}.\vec{v_1}\end{aligned}$$

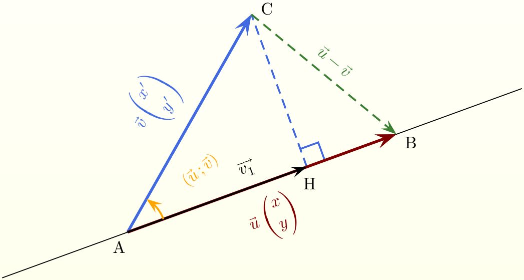


Figure 7 – Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} = 4$, $\mathrm{AC} = 5$ et $\mathrm{BC} = 6$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ arrondie au degré près.

Proposition 6 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$. (Le produit scalaire est positif).
   On note alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$.

Proposition 6 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$. (Le produit scalaire est positif).
   On note alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$.
2. $\vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$. (Le produit scalaire est défini).

Proposition 6 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$. (Le produit scalaire est positif).
   On note alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$.
2. $\vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$. (Le produit scalaire est défini).
3. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (Le produit scalaire est symétrique).

Proposition 6 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$. (Le produit scalaire est positif).
   On note alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$.
2. $\vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$. (Le produit scalaire est défini).
3. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (Le produit scalaire est symétrique).
4. $$\begin{aligned} (\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}).\vec{v} &= \alpha\overrightarrow{u_1}.\vec{v} + \beta\overrightarrow{u_2}.\vec{v} \\ \vec{u}.(\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}) &= \alpha\vec{u}.\overrightarrow{v_1} + \beta\vec{u}.\overrightarrow{v_2} \end{aligned}$$ (Le produit scalaire est linéaire à gauche et à droite).

Proposition 6 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0.$ (Le produit scalaire est positif).
   On note alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$.
2. $\vec{u}.\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}.$ (Le produit scalaire est défini).
3. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (Le produit scalaire est symétrique).
4. $$\begin{aligned} (\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}).\vec{v} &= \alpha\overrightarrow{u_1}.\vec{v} + \beta\overrightarrow{u_2}.\vec{v} \\ \vec{u}.(\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}) &= \alpha\vec{u}.\overrightarrow{v_1} + \beta\vec{u}.\overrightarrow{v_2} \end{aligned}$$ (Le produit scalaire est linéaire à gauche et à droite).
5. $$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 . \\ \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 . \\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 . \end{aligned}$$ (Identités remarquables).

On dit alors que l'application

$$\begin{array}{rccc} \cdots . \cdots : & \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$$

est une forme bilinéaire (4), symétrique (3), définie (2), positive (1).

Vous verrez l'année prochaine que c'est, en fait, LA définition d'un produit scalaire.

On dit alors que l'application

$$\begin{array}{rccl} \cdots . \cdots : & \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$$

est une forme bilinéaire (4), symétrique (3), définie (2), positive (1).

Vous verrez l'année prochaine que c'est, en fait, LA définition d'un produit scalaire.

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{P}$.

Pour $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, la $2^{\text{ème}}$ identité de 5 s'écrit :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos \widehat{\mathrm{BAC}}.$$

On reconnaît la relation d'Al-Kashi.

Exercice 4 (Droite d'Euler dans le triangle) :

Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H l'orthocentre de ABC.

1. 1. Notons A ' le milieu de [BC]. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.

Exercice 4 (Droite d'Euler dans le triangle) :

Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H l'orthocentre de ABC.

1.
   1. Notons A ' le milieu de [BC]. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.
   2. Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.

Exercice 4 (Droite d'Euler dans le triangle) :

Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H l'orthocentre de ABC.

1.
   1. Notons A ' le milieu de [BC]. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.
   2. Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.

Exercice 4 (Droite d'Euler dans le triangle) :

Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H l'orthocentre de ABC.

1.
    1. Notons A ' le milieu de [BC]. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.
    2. Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
3. Démontrer que les points O, G et H sont alignés.

III. Produit mixte

III. Produit mixte

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une orientation.

Définition 6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On appelle produit mixte (ou déterminant) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}\,;\vec{v}]$, le réel défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\,;\vec{v})\,. \tag{P.M 1}$$

III. Produit mixte

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une orientation.

Définition 6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On appelle produit mixte (ou déterminant) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}\,;\vec{v}]$, le réel défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\,;\vec{v})\,. \tag{P.M 1}$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.

III. Produit mixte

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une orientation.

Définition 6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On appelle produit mixte (ou déterminant) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}\,;\vec{v}]$, le réel défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\,;\vec{v})\,. \qquad \text{(P.M 1)}$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.

Vocabulaire : Si l'on veut être précis, on préfèrera le terme de « produit mixte » dans un cadre euclidien orienté en petite dimension (2 et 3) et le terme de « déterminant » dans les autres cas.

III. Produit mixte

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une orientation.

Définition 6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On appelle produit mixte (ou déterminant) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}\,;\vec{v}]$, le réel défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,
$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\,;\vec{v})\,. \tag{P.M 1}$$
- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.

Vocabulaire : Si l'on veut être précis, on préfèrera le terme de « produit mixte » dans un cadre euclidien orienté en petite dimension (2 et 3) et le terme de « déterminant » dans les autres cas.

ATTENTION

La fonction sinus étant impaire, le produit mixte dépend de l'orientation du plan. Un changement d'orientation du plan change le signe le signe du produit mixte.

III. Produit mixte

Proposition 7 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.

Proposition 7 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = \pm\,\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

III. Produit mixte

Proposition 7 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarques : Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) = \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Dans ce cas, on a alors :

Proposition 7 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = \pm\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarques : Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) = \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
Dans ce cas, on a alors :

- ◇ $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = 1$ si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est directe.

III. Produit mixte

Proposition 7 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = \pm\,\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarques : Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) = \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
Dans ce cas, on a alors :

- $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = 1$ si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est directe.
- $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = -1$ si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est indirecte.

III. Produit mixte

Proposition 7 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = 0$.
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}\,;\vec{v}] = \pm\,\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarques : Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}) = \sin(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Dans ce cas, on a alors :

- $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = 1$ si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est directe.
- $[\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}] = -1$ si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est indirecte.

En particulier,

Corollaire 2 :

$$\forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \quad [\vec{u}\,;\vec{u}] = 0.$$

Proposition 8 :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée directe.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ où $(x\,;y)\,,(x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = xy' - x'y. \qquad \text{(P.M 2)}$$

III. Produit mixte

1. Expressions du produit mixte

Proposition 8 :

Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée directe.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où $(x\,;y)\,,(x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = xy' - x'y. \tag{P.M 2}$$

Notation En notant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$, la relation (P.M 2) s'écrit :

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

La proposition porte sur l'égalité entre $[\vec{u}\,;\vec{v}]$ qui est toujours égal, par définition, à $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$ et le nombre $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Proposition 8 :

Soit $\mathscr{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base orthonormée directe.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où $(x\,;y)\,,(x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

$$[\vec{u}\,;\vec{v}] = xy' - x'y. \tag{P.M 2}$$

La proposition porte sur l'égalité entre $[\vec{u}\,;\vec{v}]$ qui est toujours égal, par définition, à $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$ et le nombre $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

ATTENTION

L'égalité (P.M 2) n'a lieu que dans une base orthonormée directe.

Le produit mixte permet de calculer l'aire d'un parallélogramme.

Proposition 9 :

Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ et D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Alors, $\left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right|$ est l'aire du parallélogramme ABDC :

$$\mathcal{A}_{\text{ABDC}} = \left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

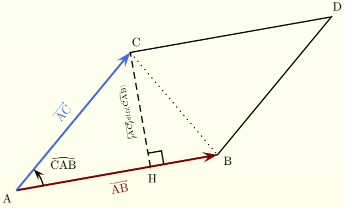


Figure 8 – $\left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right| = \mathcal{A}_{\text{ABDC}}$ où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Proposition 9 :

Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ et D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Alors, $\left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right|$ est l'aire du parallélogramme ABDC :

$$\mathcal{A}_{ABDC} = \left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

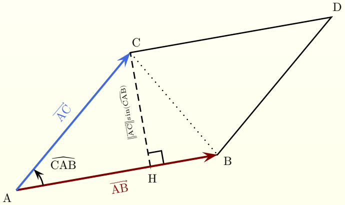


Figure 8 – $\left|\left[\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right]\right| = \mathcal{A}_{ABDC}$ où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Vocabulaire : On dit qu'un tel parallélogramme est construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

III. Produit mixte

2. Interprétation géométrique du produit mixte

Corollaire 3 :

Soient A, B, et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Alors l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right]\right|.$$

Corollaire 3 :

Soient A, B, et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Alors l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right]\right|.$$

Exercice 5 :

On donne $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(2,3), \mathrm{C}(6,1)$ et $\mathrm{D}(3,0)$ dans un repère orthonormé direct.

1. Quelle est l'aire de ABC ?

Corollaire 3 :

Soient A, B, et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Alors l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right]\right|.$$

Exercice 5 :

On donne $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(2,3), \mathrm{C}(6,1)$ et $\mathrm{D}(3,0)$ dans un repère orthonormé direct.

1. Quelle est l'aire de ABC ?
2. Justifier que ABD est rectangle en A.

Proposition 10 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $[\vec{u}\,;\vec{v}] = -\,[\vec{v}\,;\vec{u}]$ (Le produit mixte est anti-symétrique ou alterné).

Proposition 10 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $[\vec{u}\,;\vec{v}] = -[\vec{v}\,;\vec{u}]$ (Le produit mixte est anti-symétrique ou alterné).
2. $$[\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}] = \alpha\,[\overrightarrow{u_1}\,;\vec{v}] + \beta\,[\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}]$$ $$[\vec{u}\,;\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}] = \alpha\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_1}] + \beta\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_2}]$$ (Le produit mixte est linéaire à gauche et à droite).

Proposition 10 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $[\vec{u}\,;\vec{v}] = -[\vec{v}\,;\vec{u}]$ (Le produit mixte est anti-symétrique ou alterné).
2. $$[\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}] = \alpha\,[\overrightarrow{u_1}\,;\vec{v}] + \beta\,[\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}]$$ $$[\vec{u}\,;\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}] = \alpha\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_1}] + \beta\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_2}]$$ (Le produit mixte est linéaire à gauche et à droite).
3. $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + [\vec{u}\,;\vec{v}]^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$. (Identité de Lagrange).

Proposition 10 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $[\vec{u}\,;\vec{v}] = -[\vec{v}\,;\vec{u}]$ (Le produit mixte est anti-symétrique ou alterné).
2. $$\begin{aligned} &[\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}] = \alpha\,[\overrightarrow{u_1}\,;\vec{v}] + \beta\,[\overrightarrow{u_2}\,;\vec{v}] \\ &[\vec{u}\,;\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}] = \alpha\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_1}] + \beta\,[\vec{u}\,;\overrightarrow{v_2}] \end{aligned}$$ (Le produit mixte est linéaire à gauche et à droite).
3. $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + [\vec{u}\,;\vec{v}]^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$. (Identité de Lagrange).

On dit alors que l'application

$$[\vec{\cdots}\,;\vec{\cdots}] : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & [\vec{u}\,;\vec{v}] \end{array}$$

est une forme bilinéaire (2) alternée (1).

Exercice 6 :

Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer les triangles GAB, GBC et GAC ont la même aire.

Proposition 11 :

Soient $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base **quelconque**.

Deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')_{\mathcal{B}}$ sont colinéaires si, et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Proposition 11 :

Soient $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base **quelconque**.

Deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')_{\mathcal{B}}$ sont colinéaires si, et seulement si $xy' - x'y = 0$.

ATTENTION

Dans une base quelconque $[\vec{u}\,;\vec{v}] \neq \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$

IV. Droites du plan

Dans cette partie, sauf mention contraire, on considèrera $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque de $\mathcal{P}$.

Définition 7 (Vecteur directeur) :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ tout vecteur non nul $\vec{u}$, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $(\mathcal{D})$.

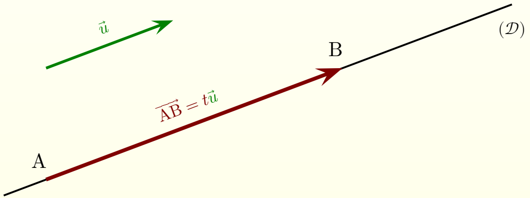


Figure 9 – Vecteur directeur d'une droite.

Remarque : Pourquoi appeler le paramètre t ?

Tout simplement pour faire référence à la physique où un mobile $\mathrm{M}(t)$ sera représenté à tout instant t par ses coordonnées, dépendantes elles-mêmes de t, par ses « équations-horaires » :

$$\mathrm{M}(t)\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{A}} + ta \\ y(t) = y_{\mathrm{A}} + tb \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 12 :

La droite $(\mathcal{D})$ passant par $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0\,;0)\,\}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ce système est appelé équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$.

Proposition 12 :

La droite $(\mathcal{D})$ passant par $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0\,;0)\,\}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ce système est appelé équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$.

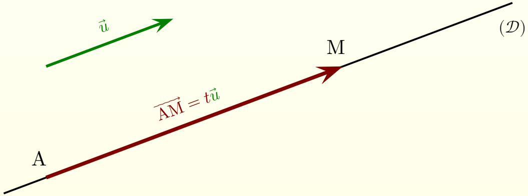


Figure 10 – Droite $(\mathcal{D})$ passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

Proposition 12 :

La droite $(\mathcal{D})$ passant par $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0\,;0)\,\}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Ce système est appelé équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$.

Remarques :

- Un point $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\,(\vec{u})$.

IV. Droites du plan

2. Équations paramétriques de droites

Proposition 12 :

La droite $(\mathcal{D})$ passant par $\mathrm{A}\,(x_0\,;y_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ où $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0\,;0)\,\}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ce système est appelé équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$.

Remarques :

- Un point $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\,(\vec{u})$.
- En particulier, le couple $(\mathrm{A}, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathcal{D})$. Le paramètre t est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.

Exercice 7 :

Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) avec :

1. $A\,(1\,;3)$ et $B\,(-1\,;2)$.

Exercice 7 :

Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) avec :

1. $A\,(1\,;3)$ et $B\,(-1\,;2)$.
2. $A\,(1\,;-3)$ et $B\,(4\,;-3)$.

Proposition 13 :

1. Toute droite $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
   Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite $(\mathcal{D})$.

Proposition 13 :

1. Toute droite $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
   Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite $(\mathcal{D})$.
2. Réciproquement, soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ alors l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Proposition 13 :

1. Toute droite $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
   Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite $(\mathcal{D})$.
2. Réciproquement, soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ alors l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : Le système $ax + by + c = 0$ de deux inconnues $(x\,;y)$ à deux équations est de rang 1 donc possède aucune ou une infinité de couples solutions.

Exercice 8 :

Résoudre graphiquement les systèmes :

1. $\begin{cases} x+y \geqslant 0 \\ x-y \leqslant 1 \\ x+2y-4 \leqslant 0 \end{cases}$

Exercice 8 :

Résoudre graphiquement les systèmes :

1. $\begin{cases} x+y \geqslant 0 \\ x-y \leqslant 1 \\ x+2y-4 \leqslant 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y^2 \geqslant 0 \\ y^2-1 \leqslant 0 \end{cases}$

Définition 8 (Vecteur normal) :

On appelle vecteur normal d'une droite $(\mathcal{D})$, tout vecteur non nul orthogonal aux vecteurs directeurs de $(\mathcal{D})$.

Définition 8 (Vecteur normal) :

On appelle vecteur normal d'une droite $(\mathcal{D})$, tout vecteur non nul orthogonal aux vecteurs directeurs de $(\mathcal{D})$.

Proposition 14 :

Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.

1. Toute droite admet une équation du type $ax + by + c = 0$ dont $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Définition 8 (Vecteur normal) :

On appelle vecteur normal d'une droite $(\mathcal{D})$, tout vecteur non nul orthogonal aux vecteurs directeurs de $(\mathcal{D})$.

Proposition 14 :

Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé.

1. Toute droite admet une équation du type $ax + by + c = 0$ dont $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.
2. Réciproquement, soient trois réels a, b et c tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. L'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple 2 (Droite définie par deux points distincts) :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) où $\mathrm{A}\,(1\,;3)$ et $\mathrm{B}\,(-1\,;2)$.

Comme $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2\,;1)$ est un vecteur directeur de (AB) alors tout point

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y) \in (\mathrm{AB}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ sont colinéaires.} \\
&\iff \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x-1) - 2(y-3) = 0 \\
&\iff x - 2y + 5 = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $(\mathrm{AB}) : x - 2y + 5 = 0$.

Exemple 3 (Droite définie par un point et un vecteur normal) :

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}\,(1\,;3)$, $\mathrm{B}\,(-1\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(-3\,;-4)$.

Dans le triangle ABC, déterminons une équation cartésienne de la hauteur issue de A. Soit $(\mathcal{D})$ cette droite.

La droite $(\mathcal{D})$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A *i.e.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y) \in (\mathcal{D}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux.} \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (x-1) + 3(y-3) = 0 \\
&\iff x + 3y - 10 = 0
\end{aligned}$$

Donc, une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $x + 3y - 10 = 0$.

Définition 9 (Équation normale d'une droite) :

Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation
$$ax + by + c = 0.$$

L'équation de $(\mathcal{D})$ est dite normale si $a^2 + b^2 = 1$ *i.e.* $\|\vec{n}\| = 1$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarques :

- La condition $a^2 + b^2 = 1$ sous-entend que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Définition 9 (Équation normale d'une droite) :

Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $\qquad ax + by + c = 0.$

L'équation de $(\mathcal{D})$ est dite normale si $a^2 + b^2 = 1$ *i.e.* $\|\vec{n}\| = 1$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarques :

- La condition $a^2 + b^2 = 1$ sous-entend que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
- Pour tout vecteur de norme 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n} = (\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$. On retrouve alors souvent des équation de droite, dites normale, sous la forme :

$$(\mathcal{D}) : \; x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = d.$$

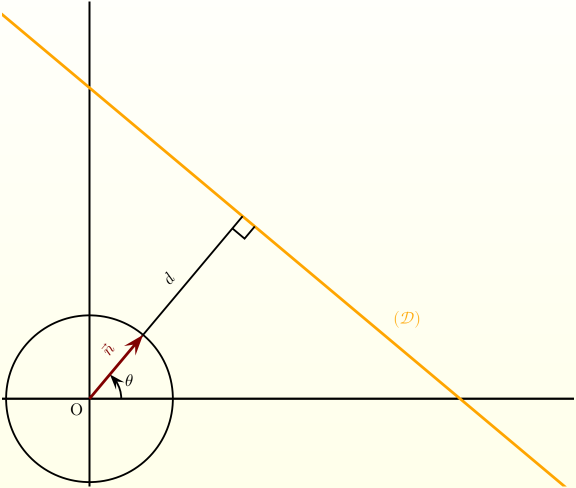


Figure 10 – Équation normale d'une droite.

Exercice 9 :

On considère les points $A\,(5\,;3)$, $B\,(1\,;-3)$ et $C\,(-3\,;4)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 9 :

On considère les points $\mathrm{A}\,(5\,;3)$, $\mathrm{B}\,(1\,;-3)$ et $\mathrm{C}\,(-3\,;4)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

Proposition 15 :

Soient $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ un repère quelconque et $(\mathcal{D})$ une droite.

1. Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l' axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme

$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Proposition 15 :

Soient $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque et $(\mathcal{D})$ une droite.

1. Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l' axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme

$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme

$$y = mx + p \quad \text{où } (m\,;p) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 15 :

Soient $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque et $(\mathcal{D})$ une droite.

1. Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l' axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme
$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$
2. Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme
$$y = mx + p \quad \text{où } (m\,;p) \in \mathbb{R}^2.$$
   - m s'appelle le **coefficient directeur** de la droite

Proposition 15 :

Soient $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ un repère quelconque et $(\mathcal{D})$ une droite.

1. Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l' axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme
$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$
2. Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme
$$y = mx + p \quad \text{où } (m\,; p) \in \mathbb{R}^2.$$
   - m s'appelle le **coefficient directeur** de la droite
   - et p son **ordonnée à l'origine**.

Proposition 15 :

Soient $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque et $(\mathcal{D})$ une droite.

1. Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l' axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme
$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$
2. Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme
$$y = mx + p \quad \text{où } (m\,;p) \in \mathbb{R}^2.$$
   - m s'appelle le **coefficient directeur** de la droite
   - et p son **ordonnée à l'origine**.

Remarque : Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ quelconque, soient deux points $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}\,(x_{\mathrm{B}}\,;y_{\mathrm{B}})$ tels que $x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$ de sorte que (AB) ne soit pas parallèle à l'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$.
Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}$. Il traduit la proportionnalité entre les accroissements des ordonnées et des abscisses des points de la droite (AB).

Proposition 16 :

1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si leur coefficient directeur sont égaux.

Proposition 16 :

1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si leur coefficient directeur sont égaux.
2. Deux droites sont orthogonales si, et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 dans un repère orthonormé.

Proposition 16 :

1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si leur coefficient directeur sont égaux.
2. Deux droites sont orthogonales si, et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 dans un repère orthonormé.

Plus précisément, si $(\mathcal{D}) : y = mx + p$ et $(\mathcal{D}') : y = m'x + p'$ alors :

1. $(\mathcal{D}) \,/\!/\, (\mathcal{D}') \iff m = m'$.

IV. Droites du plan

4. Équation réduite d'une droite

Proposition 16 :

1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si leur coefficient directeur sont égaux.
2. Deux droites sont orthogonales si, et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 dans un repère orthonormé.

Plus précisément, si $(\mathcal{D}) : y = mx + p$ et $(\mathcal{D}') : y = m'x + p'$ alors :

1. $(\mathcal{D}) \,/\!/\, (\mathcal{D}') \iff m = m'$.
2. $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \iff mm' = -1$ si $\mathcal{R}$ est orthonormé.

Exercice 10 :

On considère les droites $(\mathcal{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}') : 3x - y = 1$.

On note $\mathrm{B}\,(5\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(2\,;-7)$.

1. Justifier que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.

Exercice 10 :

On considère les droites $(\mathcal{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}') : 3x - y = 1$.

On note $\mathrm{B}\,(5\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(2\,;-7)$.

1. Justifier que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.
2. Donner une équation cartésienne de (AB).

Exercice 10 :

On considère les droites $(\mathcal{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}') : 3x - y = 1$.

On note $\mathrm{B}\,(5\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(2\,;-7)$.

1. Justifier que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.
2. Donner une équation cartésienne de (AB).
3. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par B.

Exercice 10 :

On considère les droites $(\mathcal{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}') : 3x - y = 1$.

On note $\mathrm{B}\,(5\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(2\,;-7)$.

1. Justifier que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.
2. Donner une équation cartésienne de (AB).
3. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par B.
4. Donner une équation cartésienne de la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par B.

Exercice 10 :

On considère les droites $(\mathcal{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}') : 3x - y = 1$.

On note $\mathrm{B}\,(5\,;2)$ et $\mathrm{C}\,(2\,;-7)$.

1. Justifier que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.
2. Donner une équation cartésienne de (AB).
3. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par B.
4. Donner une équation cartésienne de la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par B.
5. Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[\mathrm{BC}]$. Cette médiatrice est-elle parallèle à $(\mathcal{D})$? à $(\mathcal{D}')$?

Définition 10 :

Soient $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan $\mathcal{P}$.

On appelle distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$, noté $\mathrm{d}(\mathrm{A}\,;(\mathcal{D}))$, la plus petite des distances AM lorsque le point M parcourt la droite $(\mathcal{D})$:

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}\,;(\mathcal{D})) = \inf\left\{\mathrm{AM}\,/\,\mathrm{M} \in (\mathcal{D})\right\}.$$

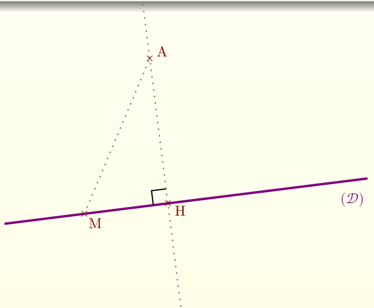


Figure 11 – $d(\mathrm{A}\,;(\mathcal{D})) = \mathrm{AH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

Théorème 17 :

Soient $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan $\mathcal{P}$.

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{A}\,;(\mathcal{D})\right) = \mathrm{AH} \iff \mathrm{H} \text{ est le projeté orthogonal de A sur } (\mathcal{D}).$$

Théorème 17 :

Soient $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan $\mathcal{P}$.

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{A}\,;(\mathcal{D})\right) = \mathrm{AH} \iff \text{H est le projeté orthogonal de A sur } (\mathcal{D}).$$

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur de ABC.

Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés de ABC ne dépend pas de M.

Proposition 18 (Calcul de la distance d'un point à une droite) :

Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque.

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur directeur : Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et soit $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$ alors :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathcal{D})) = \frac{\left|\left[\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right]\right|}{\|\vec{u}\|}.$$

Proposition 18 (Calcul de la distance d'un point à une droite) :

Soit $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque.

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur directeur : Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et soit $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$ alors :

$$d\left(\mathrm{M}\,;(\mathcal{D})\right) = \frac{\left|\left[\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right]\right|}{\|\vec{u}\|}.$$

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur normal : Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A, de vecteur normal $\vec{n}$ et soit $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$ alors :

$$d\left(\mathrm{M}\,;(\mathcal{D})\right) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Corollaire 4 (Cas d'une droite définie par une équation cartésienne dans un RON) :

Soit $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Pour tout point $\mathrm{M}\,(x_{\mathrm{M}}\,;y_{\mathrm{M}}) \in \mathscr{P}$, on a :

$$d\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})\right) = \frac{|ax_{\mathrm{M}} + by_{\mathrm{M}} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Corollaire 4 (Cas d'une droite définie par une équation cartésienne dans un RON) :

Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Pour tout point $\mathrm{M}\,(x_{\mathrm{M}}\,;y_{\mathrm{M}}) \in \mathcal{P}$, on a :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathcal{D})) = \frac{|ax_{\mathrm{M}} + by_{\mathrm{M}} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Remarque : Dans le cas d'une équation normale donc de la forme $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = d$, on a :

$$d\,(\mathrm{O}\,;(\mathcal{D})) = |d|\,.$$

Exercice 12 :

Calculer la distance du point $A\,(-2\,;-1)$ à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $3x + 4y - 5 = 0$.

V. Cercles du plan

V. Cercles du plan

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ **orthonormé** du plan $\mathcal{P}$.

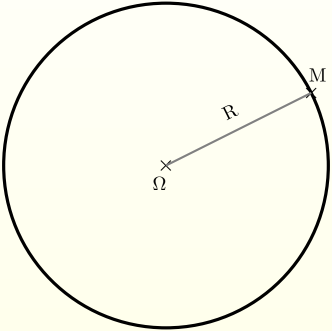


Figure 12 – Cercle de centre Ω et de rayon R.

Proposition 19 :

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathcal{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

Proposition 19 :

Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathscr{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

Remarques : On appelle disque de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathscr{D} = \left\{ \mathrm{M}\,(x\,;y)\ /\ (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 \leqslant \mathrm{R}^2 \right\}.$$

Plus particulièrement,

Proposition 19 :

Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathscr{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

Remarques : On appelle disque de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathscr{D} = \left\{ \mathrm{M}\,(x\,;y) \;/\; (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 \leqslant \mathrm{R}^2 \right\}.$$

Plus particulièrement,

- $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ est strictement à l'extérieur du cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si $(x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 > \mathrm{R}^2$.

V. Cercles du plan

1. Équations cartésiennes de cercles

Proposition 19 :

Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega)\in\mathbb{R}^2$ et de rayon $\mathrm{R}\geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M}\in\mathscr{P}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y)\in\mathscr{C}\iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2=\mathrm{R}^2.$$

Remarques : On appelle disque de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R}\geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathscr{D}=\left\{\mathrm{M}\,(x\,;y)\ /\ (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2\leqslant \mathrm{R}^2\right\}.$$

Plus particulièrement,

- $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ est strictement à l'extérieur du cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2>\mathrm{R}^2$.
- $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ est strictement à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2<\mathrm{R}^2$.

Proposition 20 :

Soient a, b et c des réels et $\mathscr{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

- Si $c < a^2 + b^2$ alors $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\,(a\,;b)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Proposition 20 :

Soient a, b et c des réels et $\mathscr{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

- Si $c < a^2 + b^2$ alors $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\,(a\,;b)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
- Si $c = a^2 + b^2$ alors $\mathscr{C}$ est réduit au point $\Omega\,(a\,;b)$.

Proposition 20 :

Soient a, b et c des réels et $\mathscr{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

- Si $c < a^2 + b^2$ alors $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\,(a\,;b)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
- Si $c = a^2 + b^2$ alors $\mathscr{C}$ est réduit au point $\Omega\,(a\,;b)$.
- Si $c > a^2 + b^2$ alors $\mathscr{C}$ est vide.

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ un repère quelconque.

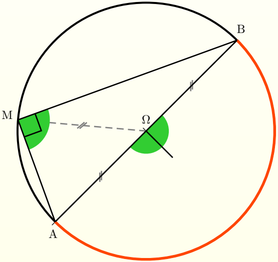
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0.$$

Proposition 21 :

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$.



Un triangle est rectangle si, et seulement si un de ses côtés est le diamètre de son cercle circonscrit.

Figure 13 – Théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle (Théorème de Thalès anglo-saxon).

Exercice 14 :

Les questions sont indépendantes.

1. Donner l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\,(1\,;3)$ et $B\,(-1\,;-2)$.
   Même question avec $A\,(3\,;3)$ et $B\,(2\,;1)$.

Exercice 14 :

Les questions sont indépendantes.

1. Donner l'équation du cercle de diamètre [AB] avec $A\,(1\,;3)$ et $B\,(-1\,;-2)$. Même question avec $A\,(3\,;3)$ et $B\,(2\,;1)$.
2. Donner l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC où $A\,(1\,;0)$, $B\,(0\,;2)$ et $C\,(3\,;1)$.

Exercice 14 :

Les questions sont indépendantes.

1. Donner l'équation du cercle de diamètre [AB] avec $A\,(1\,;3)$ et $B\,(-1\,;-2)$. Même question avec $A\,(3\,;3)$ et $B\,(2\,;1)$.
2. Donner l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC où $A\,(1\,;0)$, $B\,(0\,;2)$ et $C\,(3\,;1)$.
3. Déterminer les équations des cercles passant par $A\,(1\,;1)$, $B\,(2\,;2)$ et tangents à $(\mathrm{O}x)$.

V. Cercles du plan

2. Intersection d'une droite et d'un cercle

Proposition 22 :

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$.

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) < \mathrm{R}$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts. On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.

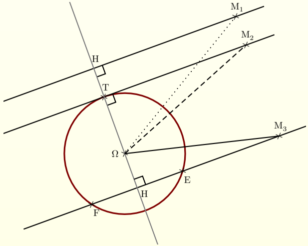


Figure 14 – Intersection d'une droite et d'un cercle.

Dans le cas de 2, on redémontre, en particulier, que la tangente à un cercle est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Proposition 22 :

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$.

1. Si $d(\Omega;(\mathcal{D})) < R$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts.
   On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.
2. Si $d(\Omega;(\mathcal{D})) = R$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un unique point.
   On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont tangents.

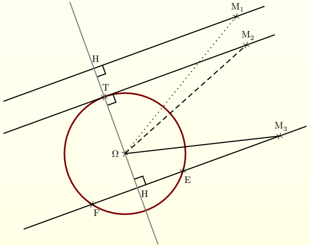


Figure 14 – Intersection d'une droite et d'un cercle.

Dans le cas de 2, on redémontre, en particulier, que la tangente à un cercle est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Proposition 22 :

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$.

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) < \mathrm{R}$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts.
   On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.
2. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) = \mathrm{R}$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un unique point.
   On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont tangents.
3. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathcal{D})) > \mathrm{R}$ alors $\mathcal{C} \cap (\mathcal{D}) = \emptyset$. On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont extérieurs.

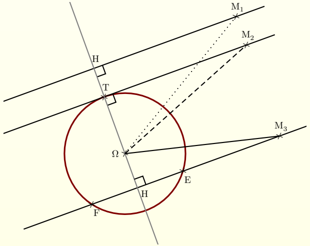


Figure 14 – Intersection d'une droite et d'un cercle.

Dans le cas de 2, on redémontre, en particulier, que la tangente à un cercle est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Exercice 15 :

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + \dfrac{2}{5} = 0$ et le point $\mathrm{A}\,(2\,;3)$.

1. Pourquoi A est-il extérieur à $\mathcal{C}$?

Exercice 15 :

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + \dfrac{2}{5} = 0$ et le point $\mathrm{A}\,(2\,;3)$.

1. Pourquoi A est-il extérieur à $\mathcal{C}$?
2. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point A.

Proposition 23 :

Soient deux cercles $\mathcal{C}\,(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathcal{C}'\,(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset \iff |\mathrm{R} - \mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{d}\,(\Omega\,;\Omega') \leqslant \mathrm{R} + \mathrm{R}'.$$

Proposition 23 :

Soient deux cercles $\mathcal{C}\left(\Omega\,;\mathrm{R}\right)$ et $\mathcal{C}'\left(\Omega'\,;\mathrm{R}'\right)$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'\neq\emptyset \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|\leqslant \mathrm{d}\left(\Omega\,;\Omega'\right)\leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$

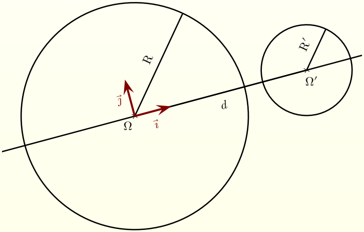


Figure 15 – $\mathrm{d}\left(\Omega\,;\Omega'\right)>\mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

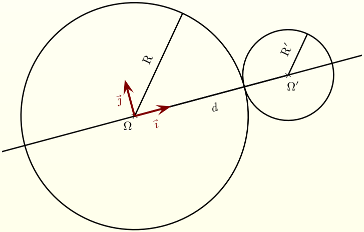


Figure 16 – $\mathrm{d}\left(\Omega\,;\Omega'\right)=\mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

Proposition 23 :

Soient deux cercles $\mathcal{C}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathcal{C}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'\neq\emptyset \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|\leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')\leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$

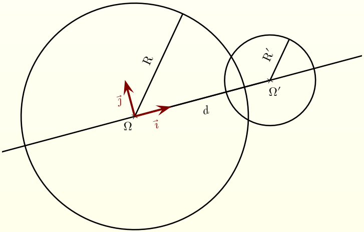


Figure 15 – $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|<\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')<\mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

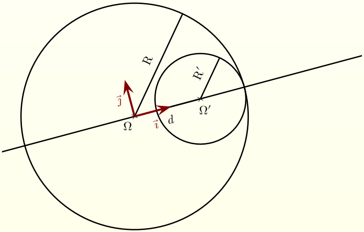


Figure 16 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$.

Proposition 23 :

Soient deux cercles $\mathcal{C}\,(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathcal{C}'\,(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset \iff |\mathrm{R} - \mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{d}\,(\Omega\,;\Omega') \leqslant \mathrm{R} + \mathrm{R}'.$$

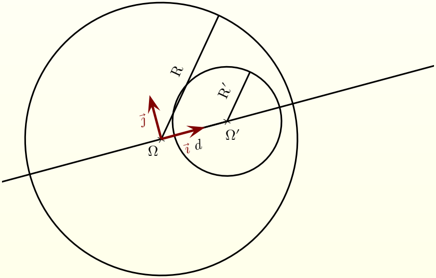


Figure 15 – $0 < \mathrm{d}\,(\Omega\,;\Omega') < |\mathrm{R} - \mathrm{R}'|$.

Exercice 16 :

On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$\mathcal{C}_1 : \ x^2 + y^2 = 100 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : \ x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0.$$

1. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents et préciser si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents intérieurement ou extérieurement.

Exercice 16 :

On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$\mathcal{C}_1 : \; x^2 + y^2 = 100 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : \; x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0.$$

1. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents et préciser si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents intérieurement ou extérieurement.
2. Déterminer une équation de la tangente au point de contact.

master may i ask
a question
yes my padawan
what do you call this?
a triangle
there are no triangles
only do angles
dies of cringe
@fresh.pince
@fresh.pince