

# *Géométrie de l'espace*

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 32



- 1 Mode de repérage
- 2 Produit scalaire
- 3 Produit vectoriel
- 4 Déterminant de trois vecteurs
- 5 Droites et plans de l'espace
- 6 Distance
- 7 Sphères



*Dans l'espace, personne ne vous entendra crier.*

*Tagline du film Alien, le huitième passager.*



Nous continuons dans ce chapitre notre étude des techniques de base en géométrie, mais cette fois-ci dans l'espace. Rien ne change très profondément par rapport à ce que nous avons vu dans le plan, il y a simplement une coordonnée de plus ... et un peu plus de place re... !

Dans tout le chapitre, on note  $\vec{\mathcal{E}}$  l'ensemble des vecteurs de l'espace et  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points de l'espace et, dans tous les exercices, l'espace sera muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé direct.



# I. Mode de repérage

## 1 Mode de repérage

- Coordonnées cartésiennes
- Coordonnées cylindriques
- Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

## 2 Produit scalaire

## 3 Produit vectoriel

## 4 Déterminant de trois vecteurs

## 5 Droites et plans de l'espace

## 6 Distance

## 7 Sphères



# I. Mode de repérage

Définition I (Vecteurs coplanaires) :

Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace sont dits **coplanaires** s'il existe un triplet  $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$  de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$



# I. Mode de repérage

Définition 1 (Vecteurs coplanaires) :

Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace sont dits **coplanaires** s'il existe un triplet  $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$  de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Si l'un des trois coefficients, par exemple  $\alpha$ , est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ) sont colinéaires.



# I. Mode de repérage

Définition 1 (Vecteurs coplanaires) :

Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace sont dits **coplanaires** s'il existe un triplet  $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$  de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Si l'un des trois coefficients, par exemple  $\alpha$ , est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ) sont colinéaires.

Dans le cas général,  $\vec{w}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , ce qui signifie bien intuitivement qu'il se situe « dans le plan » défini par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Définition 2 :

- On appelle **base** de  $\vec{\mathcal{E}}$  tout triplet de vecteurs non coplanaires  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

### Définition 2 :

- On appelle **base** de  $\mathcal{E}$  tout triplet de vecteurs non coplanaires  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .
- On appelle **repère** (cartésien) de  $\mathcal{E}$  tout quadruplet  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , où  $O$  est un point de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base de  $\mathcal{E}$ .  
 $O$  est appelé **origine** du repère.



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

### Définition 2 :

- On appelle **base** de  $\mathcal{E}$  tout triplet de vecteurs non coplanaires  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .
- On appelle **repère** (cartésien) de  $\mathcal{E}$  tout quadruplet  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , où  $O$  est un point de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base de  $\mathcal{E}$ .  
 $O$  est appelé **origine** du repère.

### Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits **orthogonaux** si les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont deux à deux orthogonaux.



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

### Définition 2 :

- On appelle **base** de  $\mathcal{E}$  tout triplet de vecteurs non coplanaires  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .
- On appelle **repère** (cartésien) de  $\mathcal{E}$  tout quadruplet  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , où  $O$  est un point de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base de  $\mathcal{E}$ .  
 $O$  est appelé **origine** du repère.

### Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits **orthogonaux** si les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont deux à deux orthogonaux.
- Si de plus, les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont **unitaires** alors le repère et la base sont dits **orthonormés**.



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Proposition 1 :

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $\mathcal{E}$ .

Tout vecteur  $\vec{u} \in \mathcal{E}$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

On dit que  $\vec{u}$  est une **combinaison linéaire** des vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ .



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Proposition 1 :

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $\mathcal{E}$ .

Tout vecteur  $\vec{u} \in \mathcal{E}$  s'écrit de manière unique sous la forme

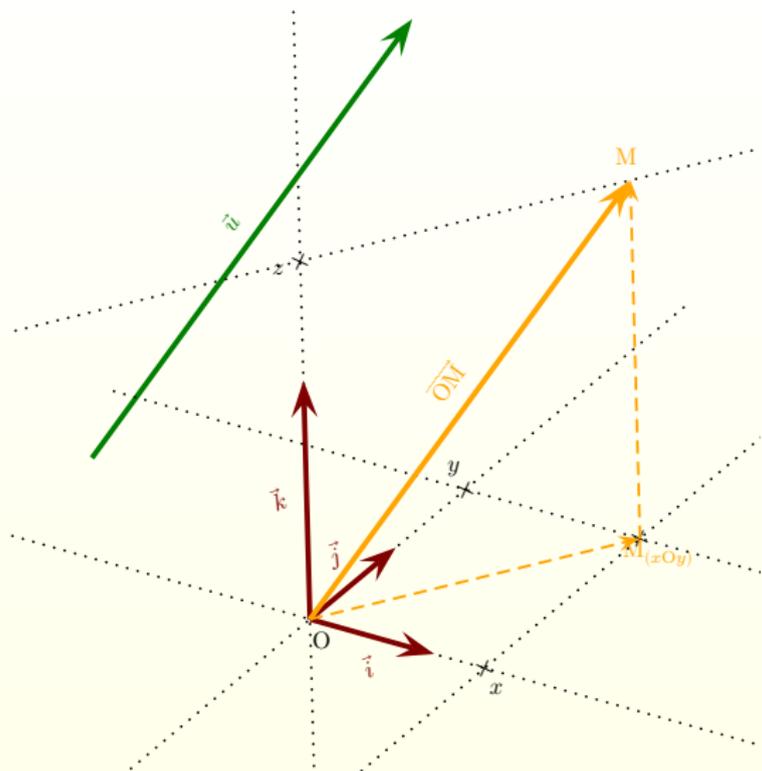
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

On dit que  $\vec{u}$  est une **combinaison linéaire** des vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ .

En particulier, pour tout point M de l'espace  $\mathcal{E}$ , le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  se décompose de manière unique dans la base  $\mathcal{B}$  sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3. \quad (2)$$





**Figure 1** – Coordonnées cartésiennes d'un point et d'un vecteur de l'espace.



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ .

On appelle **coordonnées** du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , notées  $\vec{u}(x; y; z)_{\mathcal{B}}$  ou

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ , le triplet  $(x; y; z)$  de la décomposition (1).



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ .

On appelle **coordonnées** du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , notées  $\vec{u}(x; y; z)_{\mathcal{B}}$  ou

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ , le triplet  $(x; y; z)$  de la décomposition (1).

- On appelle **coordonnées** du point M dans le repère  $\mathcal{R}$ , notées  $M(x; y; z)_{\mathcal{B}}$

ou  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ , le triplet  $(x; y; z)$  de la décomposition (2).



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ .

On appelle **coordonnées** du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , notées  $\vec{u}(x; y; z)_{\mathcal{B}}$  ou

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ , le triplet  $(x; y; z)$  de la décomposition (1).

- On appelle **coordonnées** du point M dans le repère  $\mathcal{R}$ , notées  $M(x; y; z)_{\mathcal{B}}$

ou  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ , le triplet  $(x; y; z)$  de la décomposition (2).

**Vocabulaire** :  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont respectivement appelés, **abscisse**, **ordonnée** et **côte** de M dans le repère  $\mathcal{R}$ .

Bien entendu, les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.



# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Rappel (Coordonnées de vecteurs) :

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$ .

■ Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Rappel (Coordonnées de vecteurs) :

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$ .

■ Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

■  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ .

# I. Mode de repérage

## 1. Coordonnées cartésiennes

Rappel (Coordonnées de vecteurs) :

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de l'espace  $\mathcal{E}$ .

■ Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

■  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ .

■ Si I est le milieu de [AB] alors  $I \left( \frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}; \frac{z_B + z_A}{2} \right)$ .

# I. Mode de repérage

## 2. Coordonnées cylindriques

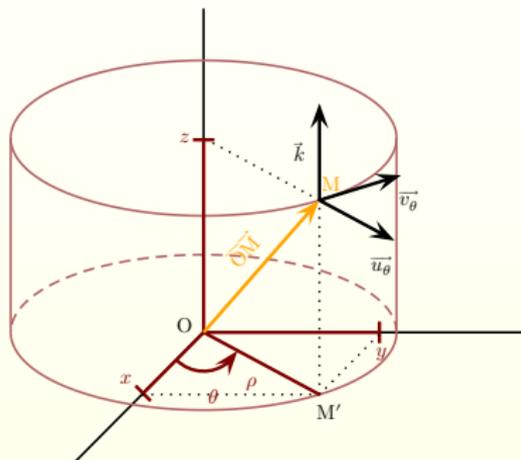
L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Soit  $M \in \mathcal{E}$  et  $M'$  son projeté orthogonal sur le plan  $(Oxy)$ .

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  est un repère du plan  $(Oxy)$ .

$M'$  admet pour coordonnées polaires  $[\rho; \theta]$  dans ce repère *i.e.*

$$\overrightarrow{OM'} = \rho u_\theta = \rho \cos(\theta) \vec{i} + \rho \sin(\theta) \vec{j}.$$



**Figure 2** – Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.



# I. Mode de repérage

## 2. Coordonnées cylindriques

Définition 4 (Coordonnées cylindriques) :

On appelle **coordonnées cylindriques** de M tout triplet  $(\rho; \theta; z)$  tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} + z\vec{k}.$$



# I. Mode de repérage

## 2. Coordonnées cylindriques

Définition 4 (Coordonnées cylindriques) :

On appelle **coordonnées cylindriques** de M tout triplet  $(\rho; \theta; z)$  tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} + z\vec{k}.$$

Remarques :

- Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.

On impose l'unicité si on exige  $\rho > 0$  et  $\theta \in [0; 2\pi[$ , ce qui exclut le point O. (sic !)



# I. Mode de repérage

## 2. Coordonnées cylindriques

Définition 4 (Coordonnées cylindriques) :

On appelle **coordonnées cylindriques** de M tout triplet  $(\rho; \theta; z)$  tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} + z\vec{k}.$$

Remarques :

- Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.  
On impose l'unicité si on exige  $\rho > 0$  et  $\theta \in [0; 2\pi[$ , ce qui exclut le point O. (sic!)
- Si un point M a pour coordonnées cartésiennes  $(x; y; z)$  et pour coordonnées cylindriques  $(\rho; \theta; z)$  dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  alors :

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta) \quad \text{et } z \text{ est inchangé!}$$



# I. Mode de repérage

## 2. Coordonnées cylindriques

Définition 4 (Coordonnées cylindriques) :

On appelle **coordonnées cylindriques** de M tout triplet  $(\rho; \theta; z)$  tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} + z\vec{k}.$$

Remarques :

- Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.  
On impose l'unicité si on exige  $\rho > 0$  et  $\theta \in [0; 2\pi[$ , ce qui exclut le point O. (sic!)
- Si un point M a pour coordonnées cartésiennes  $(x; y; z)$  et pour coordonnées cylindriques  $(\rho; \theta; z)$  dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  alors :

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta) \quad \text{et } z \text{ est inchangé!}$$

**ATTENTION**

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  ne correspond pas à la distance du point M à l'origine du repère, mais à la distance  $OM'$ , où  $M'$  est le projeté orthogonal du point M sur le plan  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

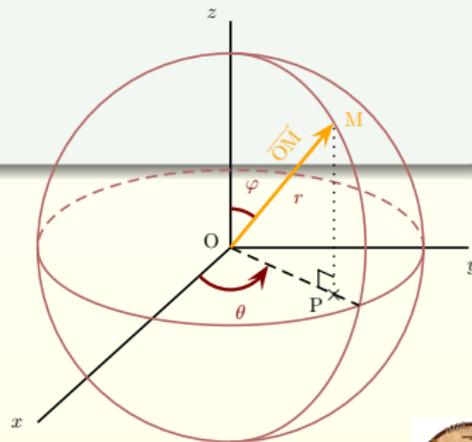
(Hors-Programme)

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Définition 5 (Coordonnées sphériques) :

On appelle **coordonnées sphériques** de M tout triplet  $(r; \theta; \varphi)$  tel que :

- $r = OM$



**Figure 3** – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Définition 5 (Coordonnées sphériques) :

On appelle **coordonnées sphériques** de M tout triplet  $(r; \theta; \varphi)$  tel que :

- $r = OM$
- Les coordonnées polaires de P, projeté orthogonal de M sur  $(Oxy)$ , sont  $[r \sin(\varphi); \theta]$  dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

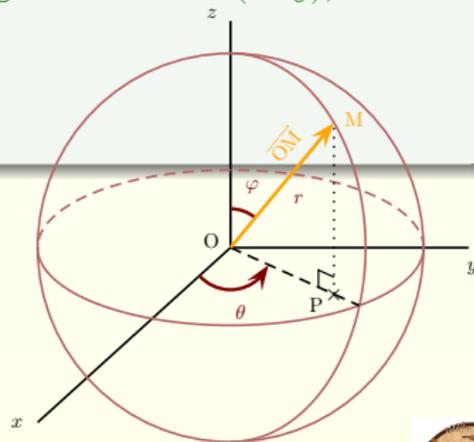


Figure 3 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Définition 5 (Coordonnées sphériques) :

On appelle **coordonnées sphériques** de M tout triplet  $(r; \theta; \varphi)$  tel que :

- $r = OM$
- Les coordonnées polaires de P, projeté orthogonal de M sur  $(Oxy)$ , sont  $[r \sin(\varphi); \theta]$  dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- $\varphi \equiv (\vec{k}; \widehat{OM}) \in [0; \pi]$ . C'est un angle non orienté.

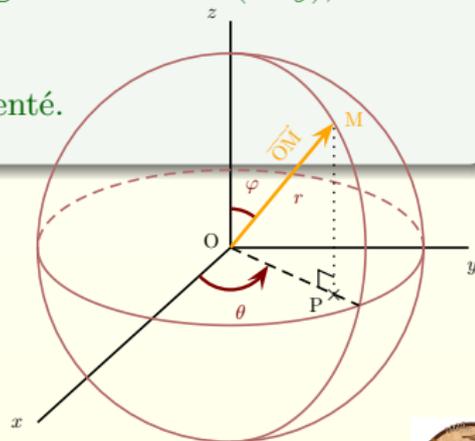


Figure 3 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

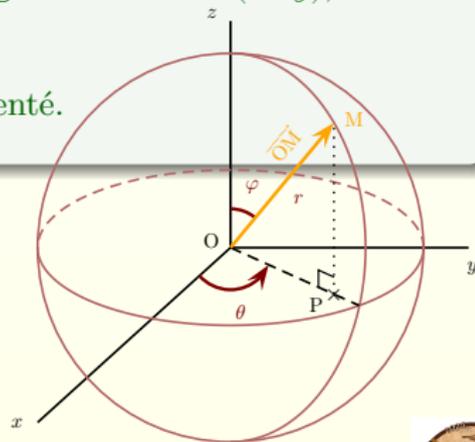
L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

**Définition 5 (Coordonnées sphériques) :**

On appelle **coordonnées sphériques** de M tout triplet  $(r; \theta; \varphi)$  tel que :

- $r = OM$
- Les coordonnées polaires de P, projeté orthogonal de M sur  $(Oxy)$ , sont  $[r \sin(\varphi); \theta]$  dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- $\varphi \equiv (\vec{k}; \widehat{OM}) \in [0; \pi]$ . C'est un angle non orienté.

**Vocabulaire :**  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sont respectivement appelés **rayon**, **longitude** et **colatitude** de M dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .



**Figure 3** – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

Si un point M a pour coordonnées sphériques  $(r; \theta; \varphi)$  alors P, le projeté orthogonal de M sur  $(Oxy)$ , a pour coordonnées polaires  $[r \sin(\varphi); \theta]$  dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{OP} = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + r \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j}$ .

Or,  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$  avec  $\overrightarrow{PM} = r \cos(\varphi) \vec{k}$ .



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

Si un point M a pour coordonnées sphériques  $(r; \theta; \varphi)$  alors P, le projeté orthogonal de M sur  $(Oxy)$ , a pour coordonnées polaires  $[r \sin(\varphi); \theta]$  dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{OP} = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + r \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j}$ .

Or,  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$  avec  $\overrightarrow{PM} = r \cos(\varphi) \vec{k}$ .

On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + r \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + r \cos(\varphi) \vec{k} \iff M \begin{pmatrix} r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

Si un point M a pour coordonnées sphériques  $(r; \theta; \varphi)$  alors P, le projeté orthogonal de M sur  $(Oxy)$ , a pour coordonnées polaires  $[r \sin(\varphi); \theta]$  dans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{OP} = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + r \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j}$ .

Or,  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$  avec  $\overrightarrow{PM} = r \cos(\varphi) \vec{k}$ .

On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \vec{i} + r \sin(\varphi) \sin(\theta) \vec{j} + r \cos(\varphi) \vec{k} \iff M \begin{pmatrix} r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Il n'est en général pas aisé de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques car il faut avoir deux angles remarquables à reconnaître pour obtenir une expression simple.



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

Exercice 1 :

Déterminer les coordonnées sphériques du point  $M(1; 1; \sqrt{2})$ .



# I. Mode de repérage

## 3. Coordonnées sphériques

(Hors-Programme)

**ATTENTION**

Ne pas confondre latitude et colatitude ! La latitude est un angle appartenant à  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

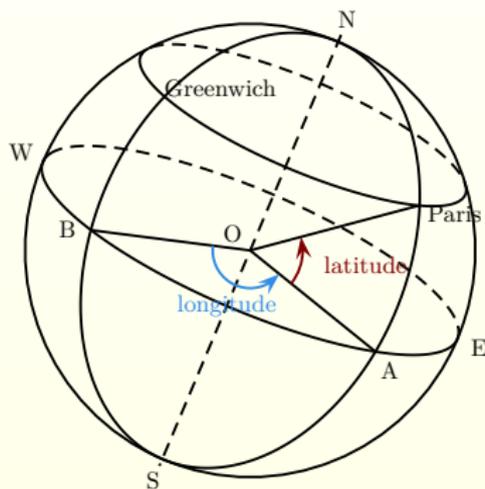


Figure 4 – Coordonnées géographiques.



## II. Produit scalaire

- 1 Mode de repérage
- 2 Produit scalaire**
  - Produit scalaire en dimension 3
  - Expression dans une base orthonormale
- 3 Produit vectoriel
- 4 Déterminant de trois vecteurs
- 5 Droites et plans de l'espace
- 6 Distance
- 7 Sphères



## II. Produit scalaire

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points de l'espace alors il existe un plan  $(\mathcal{P})$  contenant les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

En effet, si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, il suffit de prendre un plan contenant la droite  $(AB)$ , le plan  $(ABC)$  sinon.

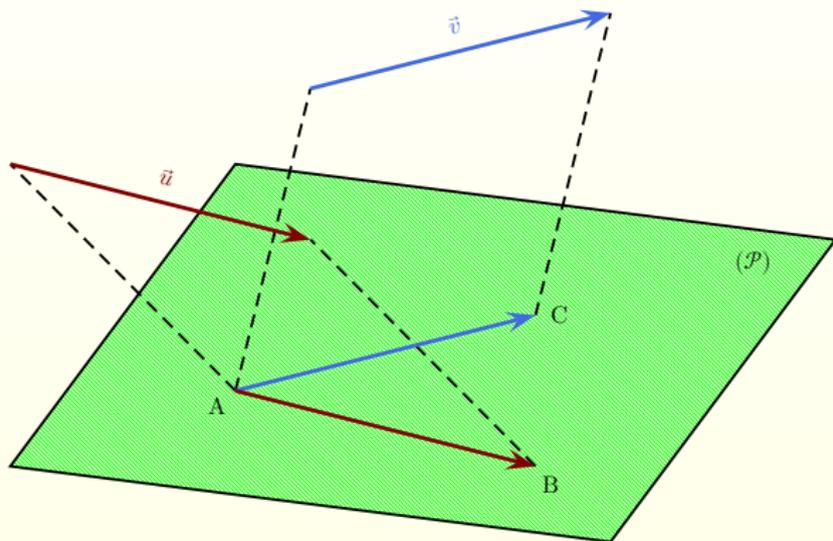


Figure 5 – Produit scalaire dans l'espace.



## II. Produit scalaire

### 1. Produit scalaire en dimension 3

Définition  $\hookrightarrow$  (Produit scalaire) :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Soient  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $(\mathcal{P})$  un plan contenant les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  calculé dans le plan  $(\mathcal{P})$ .



## II. Produit scalaire

### 1. Produit scalaire en dimension 3

Définition 6 (Produit scalaire) :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Soient  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $(\mathcal{P})$  un plan contenant les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  calculé dans le plan  $(\mathcal{P})$ .

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{P.S 1})$$

(P.S 2)



## II. Produit scalaire

### 1. Produit scalaire en dimension 3

Définition 6 (Produit scalaire) :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Soient  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $(\mathcal{P})$  un plan contenant les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  calculé dans le plan  $(\mathcal{P})$ .

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{P.S 1})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \text{ avec } H \text{ le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB)$$

(P.S 2)



## II. Produit scalaire

### 1. Produit scalaire en dimension 3

Définition 6 (Produit scalaire) :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Soient  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $(\mathcal{P})$  un plan contenant les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  calculé dans le plan  $(\mathcal{P})$ .

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{P.S 1})$$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$

$$= \frac{1}{2} \left( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \quad (\text{P.S 2})$$



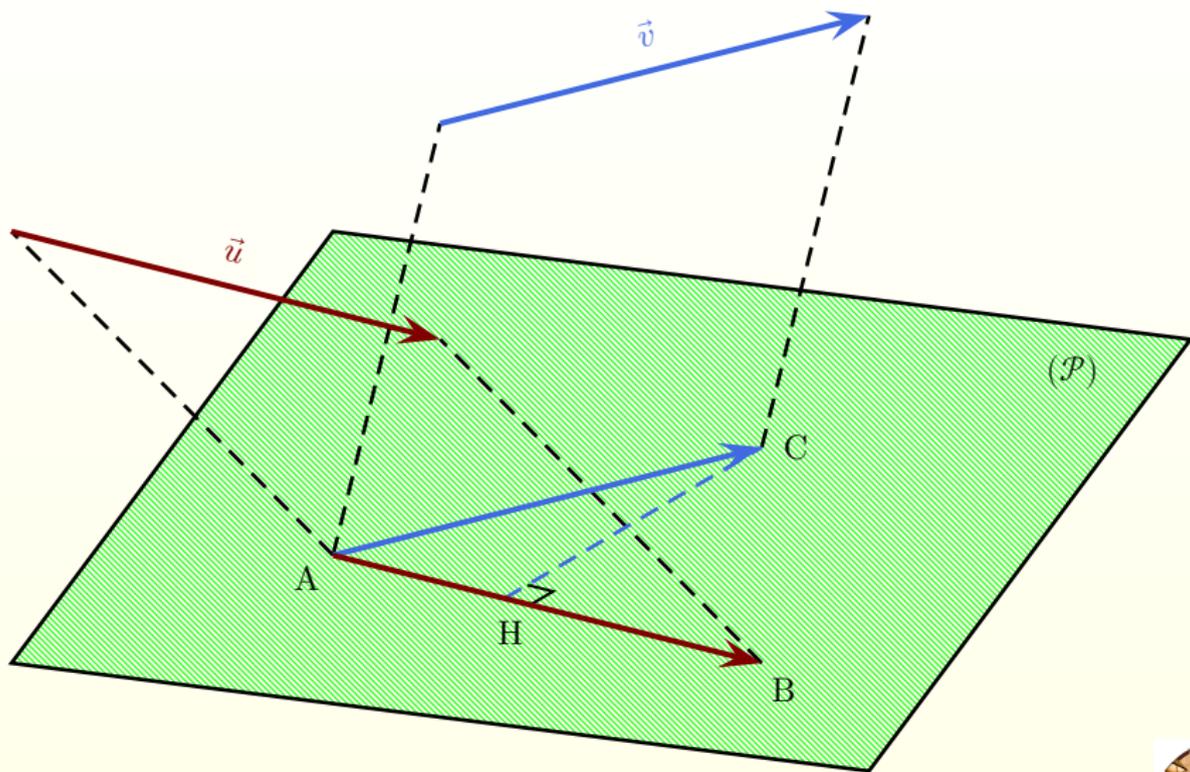


Figure 6 – Produit scalaire dans l'espace.



## II. Produit scalaire

### 1. Produit scalaire en dimension 3

Remarque :  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il est compris entre 0 et  $\pi$ .



## II. Produit scalaire

### 1. Produit scalaire en dimension 3

**Remarque** :  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il est compris entre 0 et  $\pi$ .

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramenant au produit scalaire de ces deux vecteurs dans un plan, le produit scalaire conserve ses propriétés, en particulier la bilinéarité et la symétrie :

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}, \forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$



## II. Produit scalaire

### 1. Produit scalaire en dimension 3

**Remarque** :  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il est compris entre 0 et  $\pi$ .

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramenant au produit scalaire de ces deux vecteurs dans un plan, le produit scalaire conserve ses propriétés, en particulier la bilinéarité et la symétrie :

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}, \forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

❶  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$

❷  $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \vec{u} \cdot \vec{w}$

$$(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{w} + \beta \vec{v} \cdot \vec{w}$$



## II. Produit scalaire

### 2. Expression dans une base orthonormale

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère **orthonormé**  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Proposition 2 :

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  dans une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de  $\mathcal{E}$ .

Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'. \quad (\text{P.S 3})$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



## II. Produit scalaire

### 2. Expression dans une base orthonormale

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère **orthonormé**  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Proposition 2 :

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  dans une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de  $\mathcal{E}$ .

Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'. \quad (\text{P.S 3})$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

En particulier,

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$



## II. Produit scalaire

### 2. Expression dans une base orthonormale

Exercice 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$  et  $\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{6}\vec{j} - \vec{k}$ .

Déterminer une mesure de l'angle non orienté  $(\vec{a}, \vec{b})$



# III. Produit vectoriel

- 1 Mode de repérage
- 2 Produit scalaire
- 3 Produit vectoriel**
  - Orientation de l'espace
  - Produit vectoriel en dimension 3
  - Propriétés algébriques
  - Expression dans une base orthonormée directe
- 4 Déterminant de trois vecteurs
- 5 Droites et plans de l'espace
- 6 Distance
- 7 Sphères



### III. Produit vectoriel

#### 1. Orientation de l'espace

Une fois choisis deux vecteurs unitaires et orthogonaux  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  de l'espace, il reste deux possibilités pour compléter la base orthonormée, comme l'indique les deux schémas ci-dessous dans lesquels  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  sont des vecteurs unitaires orthogonaux aux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

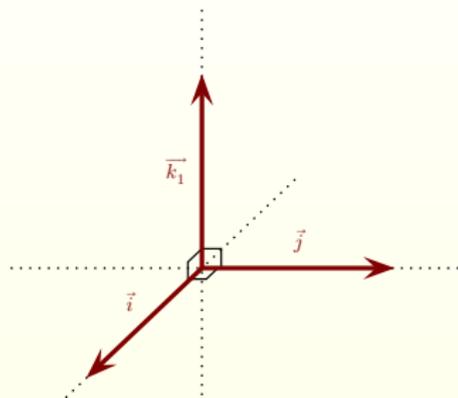


Figure 7 – Base directe

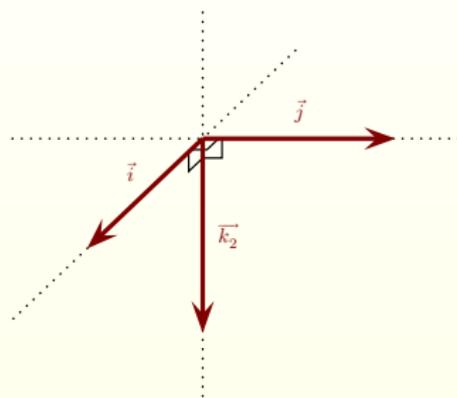


Figure 8 – Base indirecte

Figure 9 – Bases orthonormées de l'espace.



# III. Produit vectoriel

## 1. Orientation de l'espace

On convient de dire que  $(\vec{i}; \vec{j}; \overrightarrow{k_1})$  est directe alors que  $(\vec{i}; \vec{j}; \overrightarrow{k_2})$  est indirecte.  
Plusieurs moyens pour s'en souvenir :

- Bonhomme d'Ampère : adossé à  $\overrightarrow{k_1}$ , il a son pied droit sur  $\vec{i}$  et son pied gauche sur  $\vec{j}$ .

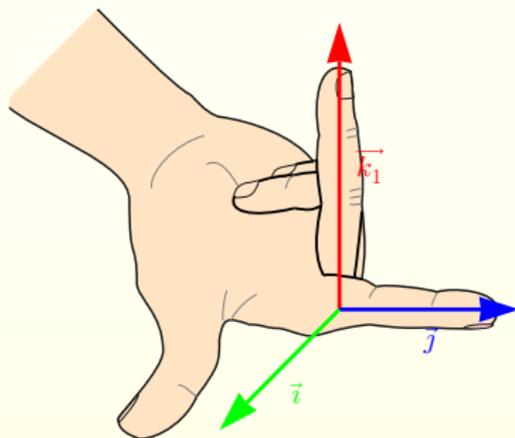


### III. Produit vectoriel

#### 1. Orientation de l'espace

On convient de dire que  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}_1)$  est directe alors que  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}_2)$  est indirecte. Plusieurs moyens pour s'en souvenir :

- Bonhomme d'Ampère : adossé à  $\vec{k}_1$ , il a son pied droit sur  $\vec{i}$  et son pied gauche sur  $\vec{j}$ .
- Règle des « trois doigts » : le pouce de la main droite sur  $\vec{i}$ , l'index sur  $\vec{j}$  et le majeur sur  $\vec{k}_1$ .



**Figure 10** – Règle des trois doigts pour orienter l'espace de manière directe (avec la main droite!!!!)

# III. Produit vectoriel

## 1. Orientation de l'espace

### Proposition 3 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.



# III. Produit vectoriel

## 1. Orientation de l'espace

### Proposition 3 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.



# III. Produit vectoriel

## 1. Orientation de l'espace

### Proposition 3 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.
- Si on effectue une permutation circulaire sur les vecteurs, la base ne change pas d'orientation.



# III. Produit vectoriel

## 1. Orientation de l'espace

### Proposition 3 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.
- Si on effectue une permutation circulaire sur les vecteurs, la base ne change pas d'orientation.

**Remarque** : Ces notions restent applicables à toute base de l'espace, même si elle n'est pas orthonormale.



# III. Produit vectoriel

## 2. Produit vectoriel en dimension 3

Il n'est pas possible de définir un produit mixte de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaître un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs.

Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le produit mixte est le produit vectoriel.



### III. Produit vectoriel

#### 2. Produit vectoriel en dimension 3

Il n'est pas possible de définir un produit mixte de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaître un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs.

Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le produit mixte est le produit vectoriel.

Définition 1 (Produit vectoriel) :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{E}$ .

On appelle **produit vectoriel** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , le vecteur défini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) \vec{k} & \text{sinon où } \vec{k} \text{ est unitaire et directement orthogonal à } (\vec{u}; \vec{v}) \end{cases}$$

(P.V 1)



# III. Produit vectoriel

## 2. Produit vectoriel en dimension 3

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$



# III. Produit vectoriel

## 2. Produit vectoriel en dimension 3

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires  $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$  désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il est compris strictement entre 0 et  $\pi$ .



# III. Produit vectoriel

## 2. Produit vectoriel en dimension 3

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires  $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$  désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il est compris strictement entre 0 et  $\pi$ .

En particulier,  $\sin(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) > 0$  et  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  a la même direction et le même sens que  $\vec{k}$ .



# III. Produit vectoriel

## 2. Produit vectoriel en dimension 3

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il est compris strictement entre 0 et  $\pi$ .

En particulier,  $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) > 0$  et  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  a la même direction et le même sens que  $\vec{k}$ .

Corollaire 1 :

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe de l'espace.



# III. Produit vectoriel

## 2. Produit vectoriel en dimension 3

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{E}$ .

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires  $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Il est compris strictement entre 0 et  $\pi$ .

En particulier,  $\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) > 0$  et  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  a la même direction et le même sens que  $\vec{k}$ .

Corollaire 1 :

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe de l'espace.

**Remarque** : Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires,  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$  est toujours l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .



# III. Produit vectoriel

## 2. Produit vectoriel en dimension 3

Exercice 3 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormale directe de  $\mathcal{E}$ .

Déterminer  $\vec{i} \wedge \vec{j}$ ,  $\vec{i} \wedge \vec{k}$  et  $\vec{j} \wedge \vec{k}$ .



# III. Produit vectoriel

## 3. Propriétés algébriques

Proposition 4 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

$$\bullet \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \quad (\text{Le produit vectoriel est anti-symétrique}).$$



# III. Produit vectoriel

## 3. Propriétés algébriques

Proposition 4 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

①  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$  (Le produit vectoriel est anti-symétrique).

②  $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w}$   
 $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$  (Le produit vectoriel est linéaire à gauche et à droite)



# III. Produit vectoriel

## 3. Propriétés algébriques

Proposition 4 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

①  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$  (Le produit vectoriel est anti-symétrique).

②  $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w}$   
 $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$  (Le produit vectoriel est linéaire à gauche et à droite)

On dit que l'application

$$\begin{aligned} \wedge : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (\vec{u}; \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

est bilinéaire (2) alternée (1).



# III. Produit vectoriel

## 3. Propriétés algébriques

ATTENTION

Le produit vectoriel n'est pas associatif.

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \neq \vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{0} = \vec{0}.$$

De ce fait, l'écriture  $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$  n'a pas de sens.



# III. Produit vectoriel

## 3. Propriétés algébriques

Exercice 4 :

Soit A, B, C trois points de l'espace. Montrer que pour tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$



### III. Produit vectoriel

#### 4. Expression dans une base orthonormée directe

Proposition 5 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormale directe de  $\mathcal{E}$ .

$$\text{Si } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$



### III. Produit vectoriel

#### 4. Expression dans une base orthonormée directe

Proposition 5 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base orthonormale directe de  $\mathcal{E}$ .

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$ .

Autrement dit,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \left( \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right).$$



### III. Produit vectoriel

#### 4. Expression dans une base orthonormée directe

Exemple 1 :

On peut toujours calculer des aires de triangle à l'aide du produit vectoriel.

Par exemple, si  $A(1;2;3)$ ,  $B(-1;1;-1)$  et  $C(0;2;4)$  alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puis } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Enfin, } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

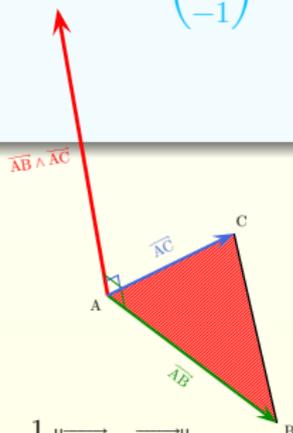


Figure 11 -  $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$



### III. Produit vectoriel

#### 4. Expression dans une base orthonormée directe

Pour répondre définitivement à la non-associativité, on peut alors démontrer le résultat suivant :

Corollaire 2 (Double produit vectoriel) :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$



### III. Produit vectoriel

#### 4. Expression dans une base orthonormée directe

Pour répondre définitivement à la non-associativité, on peut alors démontrer le résultat suivant :

Corollaire 2 (Double produit vectoriel) :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$

Le vecteur  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$  appartient toujours au sous-espace engendré par  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , puisqu'il est orthogonal à l'orthogonal de ce sous-espace. Ce vecteur est donc combinaison linéaire de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . La formule du double produit vectoriel explicite les coefficients de cette combinaison sous forme de produits scalaires.



# IV. Déterminant de trois vecteurs

- 1 Mode de repérage
- 2 Produit scalaire
- 3 Produit vectoriel
- 4 Déterminant de trois vecteurs**
  - Interprétation géométrique du produit mixte
  - Expression du déterminant dans une base orthonormée directe
  - Propriétés algébriques
  - Condition de coplanarité
- 5 Droites et plans de l'espace
- 6 Distance
- 7 Sphères



## IV. Déterminant de trois vecteurs

### Définition 8 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$ .

On appelle **déterminant** ou **produit mixte** de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , noté  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ , le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$



## IV. Déterminant de trois vecteurs

### Définition 8 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$ .

On appelle **déterminant** ou **produit mixte** de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , noté  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ , le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Par analogie avec le plan, le produit mixte de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est également noté  $[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$  mais cette notation sera rapidement abandonnée à mesure que l'on gagnera en dimension de l'espace.



## IV. Déterminant de trois vecteurs

### Définition 8 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$ .

On appelle **déterminant** ou **produit mixte** de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , noté  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ , le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Par analogie avec le plan, le produit mixte de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est également noté  $[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$  mais cette notation sera rapidement abandonnée à mesure que l'on gagnera en dimension de l'espace.

### Exemple 2 :

Si  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base orthonormée directe alors

$$\det(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) = (\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{k}\|^2 = 1.$$



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 1. Interprétation géométrique du produit mixte

Proposition 6 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$  **non coplanaires**.

Alors,  $|\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})|$  est l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

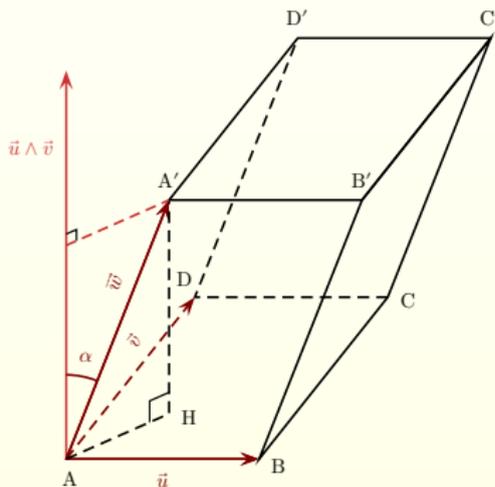


Figure 12 – Volume d'un parallélépipède dans l'espace.



## IV. Déterminant de trois vecteurs

### 2. Expression du déterminant dans une base orthonormée directe

Proposition 7 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base orthonormée directe de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$  alors

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \quad (\det_{C_1})$$

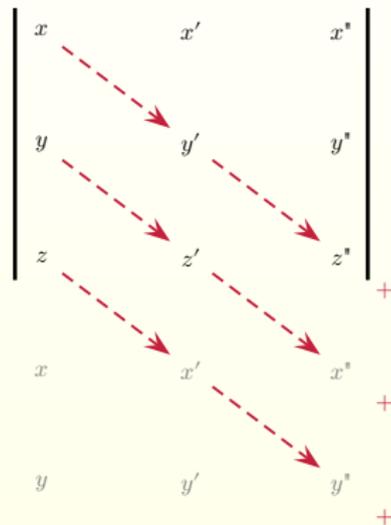
$$= -x' \begin{vmatrix} y & y'' \\ z & z'' \end{vmatrix} + y' \begin{vmatrix} x & x'' \\ z & z'' \end{vmatrix} - z' \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix} \quad (\det_{C_2})$$

$$= x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}. \quad (\det_{C_3})$$

On dit que l'on a respectivement développé par rapport à la première, deuxième ou troisième colonne.

# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 2. Expression du déterminant dans une base orthonormée directe



$$= xy'z'' + yz'x'' + zx'y''$$

Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme ci-contre :

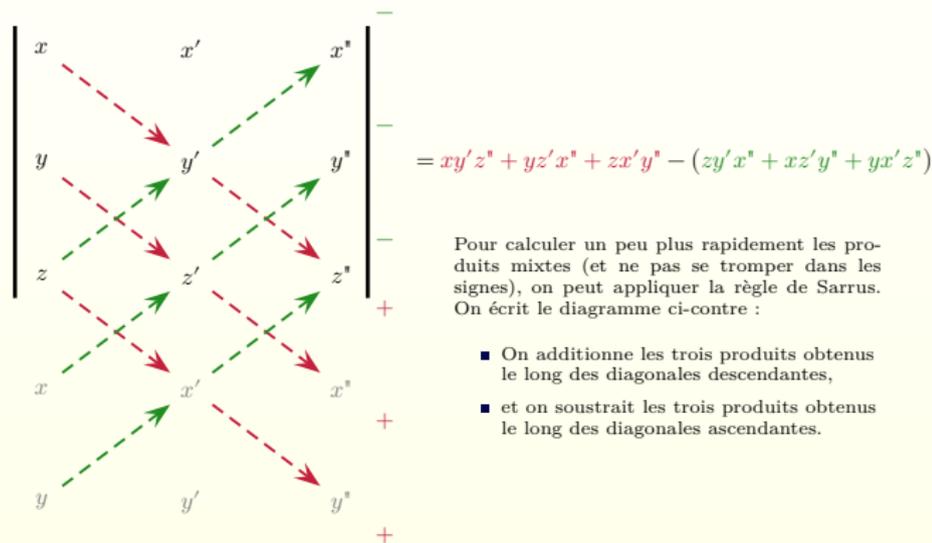
- On additionne les trois produits obtenus le long des diagonales descendantes,

Figure 13 – Règle de Sarrus



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 2. Expression du déterminant dans une base orthonormée directe



Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme ci-contre :

- On additionne les trois produits obtenus le long des diagonales descendantes,
- et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes.

Figure 13 – Règle de Sarrus



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 2. Expression du déterminant dans une base orthonormée directe

Corollaire 3 :

Soit  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est une base orthonormée directe de  $\mathcal{E}$ .

$$\det(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) = 1.$$



## IV. Déterminant de trois vecteurs

### 2. Expression du déterminant dans une base orthonormée directe

Exercice 5 :

Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs :

$$\vec{u}(1; 2; -1), \vec{v}(-1; 3; -1) \text{ et } \vec{w}(-8; 1; 0).$$



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 3. Propriétés algébriques

Proposition 8 :

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et  $\vec{e}$  des vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

$$\textcircled{1} \det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}) = \alpha \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta \det(\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}).$$



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 3. Propriétés algébriques

Proposition 8 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{e}$  des vecteurs de l'espace  $\mathcal{E}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}) &= \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}). \\ \det(\vec{u}; \alpha\vec{v} + \beta\vec{r}; \vec{w}) &= \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{r}; \vec{w}). \end{aligned}$$



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 3. Propriétés algébriques

### Proposition 8 :

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et  $\vec{e}$  des vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

- ①  $\det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{r}; \vec{v}; \vec{w})$ .
- $\det(\vec{u}; \alpha\vec{v} + \beta\vec{r}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{r}; \vec{w})$ .
- $\det(\vec{u}; \vec{v}; \alpha\vec{w} + \beta\vec{r}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{r})$ .

On dit que le déterminant est **trilinéaire** dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 3. Propriétés algébriques

### Proposition 8 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{e}$  des vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

$$\textcircled{1} \det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}; \alpha\vec{v} + \beta\vec{r}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{r}; \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \alpha\vec{w} + \beta\vec{r}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{r}).$$

On dit que le déterminant est **trilinéaire** dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\textcircled{2} \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \det(\vec{w}; \vec{u}; \vec{v}) = \det(\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}).$$

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 3. Propriétés algébriques

### Proposition 8 :

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et  $\vec{e}$  des vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

$$\textcircled{1} \det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}; \alpha\vec{v} + \beta\vec{r}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{r}; \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \alpha\vec{w} + \beta\vec{r}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{r}).$$

On dit que le déterminant est **trilinéaire** dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\textcircled{2} \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \det(\vec{w}; \vec{u}; \vec{v}) = \det(\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}).$$

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.

$$\textcircled{3} \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = -\det(\vec{v}; \vec{u}; \vec{w}) = -\det(\vec{u}; \vec{w}; \vec{v}) = -\det(\vec{w}; \vec{v}; \vec{u}).$$

On dit que le déterminant est anti-symétrique.



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 3. Propriétés algébriques

### Proposition 8 :

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et  $\vec{e}$  des vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

Alors :

$$\textcircled{1} \det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{r}; \vec{v}; \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}; \alpha\vec{v} + \beta\vec{r}; \vec{w}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{r}; \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \alpha\vec{w} + \beta\vec{r}) = \alpha\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) + \beta\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{r}).$$

On dit que le déterminant est **trilinéaire** dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .

$$\textcircled{2} \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \det(\vec{w}; \vec{u}; \vec{v}) = \det(\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}).$$

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.

$$\textcircled{3} \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = -\det(\vec{v}; \vec{u}; \vec{w}) = -\det(\vec{u}; \vec{w}; \vec{v}) = -\det(\vec{w}; \vec{v}; \vec{u}).$$

On dit que le déterminant est anti-symétrique.

Le déterminant change donc de signe si l'on échange deux vecteurs.



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 4. Condition de coplanarité

### Théorème 9 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$ . Alors,

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si, et seulement si  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$ .



## IV. Déterminant de trois vecteurs

### 4. Condition de coplanarité

#### Théorème 9 :

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\vec{\mathcal{E}}$ . Alors,

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si, et seulement si  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$ .

#### Exercice 6 :

Soient  $\vec{u}(-1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}(3, 1, 2)$ ,  $\vec{w}(1, 1, 2)$  trois vecteurs de l'espace.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  sont-ils coplanaires ? Si non forment-ils une base directe ?



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 4. Condition de coplanarité

À retenir :

Si {

- un des des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est nul
- ou
- deux des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont égaux
- ou
- deux des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires
- ou
- un des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est combinaison linéaire des deux autres

, alors  $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$ .



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 4. Condition de coplanarité

À retenir :

Si  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ un des des vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ est nul} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ deux des vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont égaux} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ deux des vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ un des vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ est combinaison} \\ \text{linéaire des deux autres} \end{array} \right. , \text{ alors } \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0.$

L'application

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) &\longmapsto \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \end{aligned}$$

est une forme trilinéaire alternée.



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 4. Condition de coplanarité

### Exercice 1 :

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

- 1 Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$



# IV. Déterminant de trois vecteurs

## 4. Condition de coplanarité

### Exercice 1 :

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

- ❶ Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

- ❷ Montrer l'identité de Lagrange :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|(\vec{u} \wedge \vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$



# V. Droites et plans de l'espace

- 1 Mode de repérage
- 2 Produit scalaire
- 3 Produit vectoriel
- 4 Déterminant de trois vecteurs
- 5 Droites et plans de l'espace**
  - Représentations paramétriques
  - Équations cartésiennes de plan
- 6 Distance
- 7 Sphères



# V. Droites et plans de l'espace

## 1. Représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Proposition 10 (Droite) :

Soient  $A(x_A; y_A; z_A) \in \mathcal{E}$  et  $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma) \in \vec{\mathcal{E}}$  un vecteur non nul.

La droite  $(\mathcal{D}) = A + \mathbb{R}\vec{u}$  passant par A et dirigée par  $\vec{u}$  admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

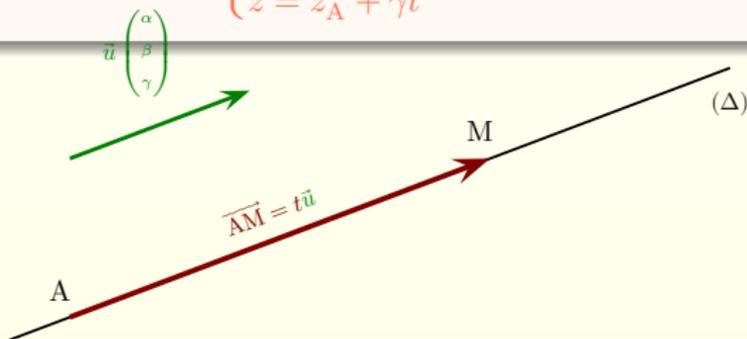


Figure 14 – Équations paramétriques d'une droite.



# V. Droites et plans de l'espace

## 1. Représentations paramétriques

Remarques :

- Les coordonnées  $(x; y; z)$  représentent les coordonnées d'un point  $M(x; y; z)$  quelconque qui appartiendrait à la droite  $(\mathcal{D})$ .  
Les points de la droite  $(\mathcal{D})$  sont alors obtenus en faisant varier le paramètre  $t$  dans  $\mathbb{R}$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 1. Représentations paramétriques

Remarques :

- Les coordonnées  $(x; y; z)$  représentent les coordonnées d'un point  $M(x; y; z)$  quelconque qui appartiendrait à la droite  $(\mathcal{D})$ .  
Les points de la droite  $(\mathcal{D})$  sont alors obtenus en faisant varier le paramètre  $t$  dans  $\mathbb{R}$ .
- En particulier, le couple  $(A, \vec{u})$  doit être vu comme un repère de la droite  $(\mathcal{D})$ . Le paramètre  $t$  est alors l'abscisse d'un point  $M$  de la droite dans celui-ci.



# V. Droites et plans de l'espace

## 1. Représentations paramétriques

Remarques :

- Les coordonnées  $(x; y; z)$  représentent les coordonnées d'un point  $M(x; y; z)$  quelconque qui appartiendrait à la droite  $(\mathcal{D})$ .  
Les points de la droite  $(\mathcal{D})$  sont alors obtenus en faisant varier le paramètre  $t$  dans  $\mathbb{R}$ .
- En particulier, le couple  $(A, \vec{u})$  doit être vu comme un repère de la droite  $(\mathcal{D})$ . Le paramètre  $t$  est alors l'abscisse d'un point  $M$  de la droite dans celui-ci.
- Pourquoi appeler le paramètre  $t$ ?  
Tout simplement pour faire référence à la physique où un mobile  $M(t)$  sera représenté à tout instant  $t$  par ses coordonnées, dépendantes elles-mêmes de  $t$ , par ses « équations-horaires » :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = x_A + t\alpha \\ y(t) = y_A + t\beta \\ z(t) = z_A + t\gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



# V. Droites et plans de l'espace

## 1. Représentations paramétriques

Remarques :

- En particulier, le couple  $(A, \vec{u})$  doit être vu comme un repère de la droite  $(\mathcal{D})$ . Le paramètre  $t$  est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.
- Pourquoi appeler le paramètre  $t$ ?  
Tout simplement pour faire référence à la physique où un mobile  $M(t)$  sera représenté à tout instant  $t$  par ses coordonnées, dépendantes elles-mêmes de  $t$ , par ses « équations-horaires » :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = x_A + t\alpha \\ y(t) = y_A + t\beta \\ z(t) = z_A + t\gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Pour une demi-droite, il suffit de remplacer  $t \in \mathbb{R}$ , par  $t \in [\alpha; +\infty[$  ou  $t \in ]-\infty; \alpha[$ , par exemple, pour des demies-droites fermée et ouverte respectivement.

Pour un segment il suffira de remplacer  $t \in \mathbb{R}$  par  $t \in [a; b]$ .

- Enfin, avec une notation plus orientée algèbre linéaire,

$$(\mathcal{D}) = A + \text{vect}(\vec{u}).$$



# V. Droites et plans de l'espace

## 1. Représentations paramétriques

Proposition II (Plan) :

Soit  $A(x_A; y_A; z_A) \in \mathcal{E}$  un point et soient  $\vec{u}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$  et  $\vec{v}(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$  deux vecteurs non colinéaires de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Le plan  $(\mathcal{P}) = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ , passant par A et dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  admet pour représentation paramétrique : représentation paramétrique, de la forme :

$$(\mathcal{P}) = A + \text{vect}(\vec{u}; \vec{v}) : \begin{cases} x = x_A + t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_A + t\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_A + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}, (t; s) \in \mathbb{R}^2.$$

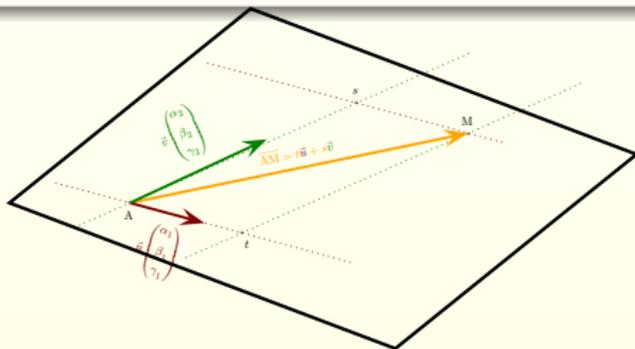


Figure 15 – Équations paramétriques d'un plan.



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Proposition 12 :

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère orthonormé direct de  $\mathcal{E}$ . Soit  $A(x_A; y_A; z_A) \in \mathcal{E}$  un point et soient  $\vec{u}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$  et  $\vec{v}(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathcal{E}$ .

Le plan  $(\mathcal{P})$  passant par A et dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  admet pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_A & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_A & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Proposition B :

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère quelconque de  $\mathcal{E}$ .

- ④ Tout plan  $(\mathcal{P})$  admet une équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ .

Cette équation est appelée **équation cartésienne** du plan  $(\mathcal{P})$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Proposition B :

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère quelconque de  $\mathcal{E}$ .

- 1 Tout plan  $(\mathcal{P})$  admet une équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ .

Cette équation est appelée **équation cartésienne** du plan  $(\mathcal{P})$ .

- 2 Réciproquement, soit  $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$  tels que  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  alors l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  dont les coordonnées sont solutions de

l'équation  $ax + by + cz + d = 0$  est un plan  $(\mathcal{P})$  de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace appartiendra donc au plan  $(\mathcal{P})$  si, et seulement si ses coordonnées sont solutions de l'équation à 3 inconnues  $ax + by + cz + d = 0$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'espace appartiendra donc au plan  $(\mathcal{P})$  si, et seulement si ses coordonnées sont solutions de l'équation à 3 inconnues  $ax + by + cz + d = 0$ .

**Remarque** : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  par un facteur  $k$  non nul *i.e.* remplacer le vecteur normal  $\vec{n}$  par un vecteur qui lui est colinéaire.



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Exemple 3 :

Les Plans  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ,  $(O; \vec{i}; \vec{k})$  et  $(O; \vec{j}; \vec{k})$  passant par  $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de vecteur normal

respectif  $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ont, respectivement, comme équation  $z = 0$ ,  $y = 0$  et  $x = 0$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Exercice 8 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

- ① passant par  $A(1, -1, 2)$  et dirigée par les vecteurs  $\vec{u}(2, 0, 1)$  et  $\vec{v}(2, 1, 0)$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Exercice 8 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

- 1 passant par  $A(1, -1, 2)$  et dirigée par les vecteurs  $\vec{u}(2, 0, 1)$  et  $\vec{v}(2, 1, 0)$ .
- 2 passant par les points  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(1, -1, 1)$  et  $D(1, 1, -1)$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Exercice 8 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

- 1 passant par  $A(1, -1, 2)$  et dirigée par les vecteurs  $\vec{u}(2, 0, 1)$  et  $\vec{v}(2, 1, 0)$ .
- 2 passant par les points  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(1, -1, 1)$  et  $D(1, 1, -1)$ .
- 3 passant par  $C$  et normal au vecteur  $\vec{u}$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Définition 9 (Équation normale d'un plan) :

Soient  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  des réels tels que  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  et  $(\mathcal{P})$  le plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$ .

L'équation est dite normale si  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  i.e.  $\|\vec{n}\| = 1$  où  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Théorème 14 :

Soient  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n} \neq \vec{0}$  et  $\vec{n}' \neq \vec{0}$ .

- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont sécants suivant une droite  $(\mathcal{D})$  dirigée par  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ .



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Théorème 14 :

Soient  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n} \neq \vec{0}$  et  $\vec{n}' \neq \vec{0}$ .

- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont sécants suivant une droite  $(\mathcal{D})$  dirigée par  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ .
- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires et si A est un point quelconque de  $(\mathcal{P})$  :



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Théorème 14 :

Soient  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n} \neq \vec{0}$  et  $\vec{n}' \neq \vec{0}$ .

- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont sécants suivant une droite  $(\mathcal{D})$  dirigée par  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ .
- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires et si A est un point quelconque de  $(\mathcal{P})$  :
  - Si  $A \in (\mathcal{P}')$ , les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont confondus.



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Théorème 14 :

Soient  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n} \neq \vec{0}$  et  $\vec{n}' \neq \vec{0}$ .

- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont sécants suivant une droite  $(\mathcal{D})$  dirigée par  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ .
- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires et si A est un point quelconque de  $(\mathcal{P})$  :
  - Si  $A \in (\mathcal{P}')$ , les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont confondus.
  - Si  $A \notin (\mathcal{P}')$ , les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont strictement parallèles.



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

### Théorème 14 :

Soient  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n} \neq \vec{0}$  et  $\vec{n}' \neq \vec{0}$ .

- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont sécants suivant une droite  $(\mathcal{D})$  dirigée par  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ .
- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires et si A est un point quelconque de  $(\mathcal{P})$  :
  - Si  $A \in (\mathcal{P}')$ , les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont confondus.
  - Si  $A \notin (\mathcal{P}')$ , les plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont strictement parallèles.
- $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont perpendiculaires si, et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux.

Ainsi,

$$(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}') \iff \vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0.$$



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Petite remarque en passant : deux droites contenues dans des plans perpendiculaires ne sont pas nécessairement perpendiculaires (elles peuvent être parallèles), et deux droites incluses dans des plans parallèles ne sont pas forcément parallèles (elles peuvent être orthogonales).

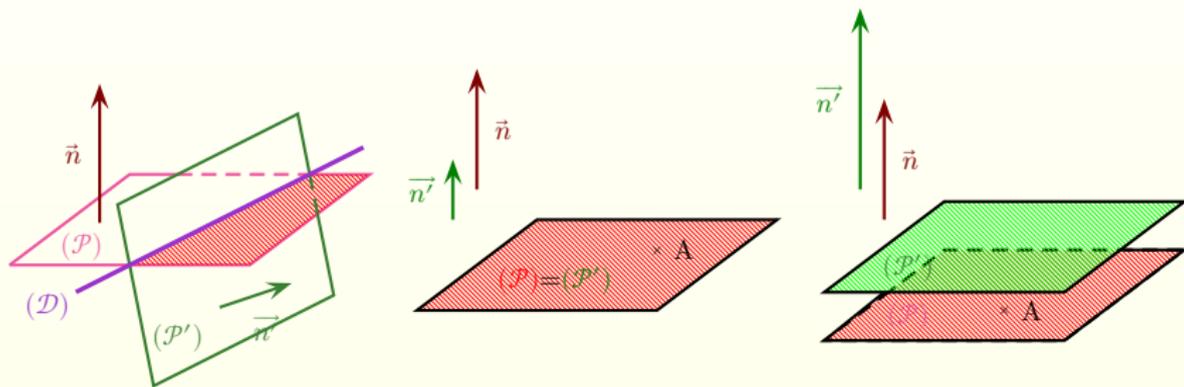


Table 1 – Position relative de plans.



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Dans l'espace, une droite ( $\mathcal{D}$ ) n'est pas représentée par une seule équation cartésienne mais par deux : celles de deux plans sécants dont elle est l'intersection.

Plus précisément, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \\ (\mathcal{P}') : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \vec{n}_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \end{array} \right.$$



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Dans l'espace, une droite ( $\mathcal{D}$ ) n'est pas représentée par une seule équation cartésienne mais par deux : celles de deux plans sécants dont elle est l'intersection.

Plus précisément, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \\ (\mathcal{P}') : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \vec{n}_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \end{array} \right.$$

Si  $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq \vec{0}$  alors ( $\mathcal{P}$ ) et ( $\mathcal{P}'$ ) sont sécants suivant une droite ( $\mathcal{D}$ ) dont un système d'équations cartésienne est :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$



# V. Droites et plans de l'espace

## 2. Équations cartésiennes de plan

Exercice 9 :

$$\text{Soit } A(0; -1; 4) \text{ et } (\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer une équation cartésienne du plan contenant A et  $(\mathcal{D})$ .



# VI. Distance

- 1 Mode de repérage
- 2 Produit scalaire
- 3 Produit vectoriel
- 4 Déterminant de trois vecteurs
- 5 Droites et plans de l'espace
- 6 Distance**
  - Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite
  - Distance d'un point à un plan
  - Distance d'un point à une droite
- 7 Sphères



# VI. Distance

## 1. Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition 10 (Projeté orthogonal sur un plan) :

Soient un plan  $(\mathcal{P})$  de vecteur normal  $\vec{n}$  et un point A de l'espace.

On appelle **projeté orthogonal** de A sur  $(\mathcal{P})$ , l'intersection du plan  $(\mathcal{P})$  et de la droite de vecteur directeur  $\vec{n}$  passant par A.

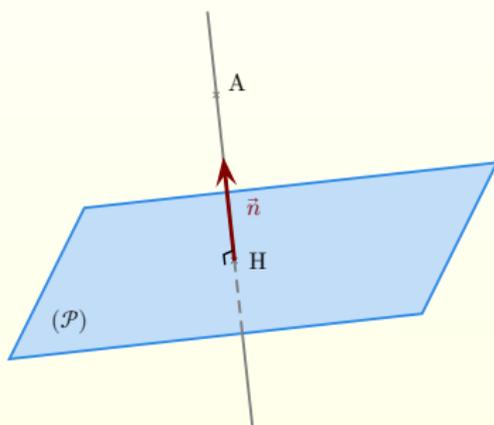


Figure 16 – H est le projeté orthogonal de A sur  $(\mathcal{P})$ .



# VI. Distance

## 1. Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

### Méthode I :

Soient  $(\mathcal{P})$  un plan et  $A$  un point de l'espace.

- 1 On trouve une représentation paramétrique de la droite  $(\mathcal{D})$  passant par  $A$  et de vecteur directeur le vecteur normal du plan.



## VI. Distance

### 1. Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

#### Méthode I :

Soient  $(\mathcal{P})$  un plan et  $A$  un point de l'espace.

- 1 On trouve une représentation paramétrique de la droite  $(\mathcal{D})$  passant par  $A$  et de vecteur directeur le vecteur normal du plan.
- 2 On trouve le point d'intersection de  $(\mathcal{D})$  et de  $(\mathcal{P})$ .



# VI. Distance

## 1. Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Exercice 10 :

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan  $(\mathcal{P})$ .

① A  $(1; -1; 0)$  et  $(\mathcal{P}) : 2x - y - 16 = 0$ .



# VI. Distance

## 1. Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Exercice 10 :

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan  $(\mathcal{P})$ .

❶ A  $(1; -1; 0)$  et  $(\mathcal{P}) : 2x - y - 16 = 0$ .

❷ A  $(2; 1; 3)$  et  $(\mathcal{P}) : x + y + z = 0$ .



## VI. Distance

### 1. Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition II (Projeté orthogonal sur une droite) :

Soient une droite  $(\mathcal{D})$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  et un point A de l'espace.

On appelle **projeté orthogonal** de A sur  $(\mathcal{D})$ , l'intersection de la droite  $(\mathcal{D})$  et du plan de vecteur normal  $\vec{u}$  et passant par A.

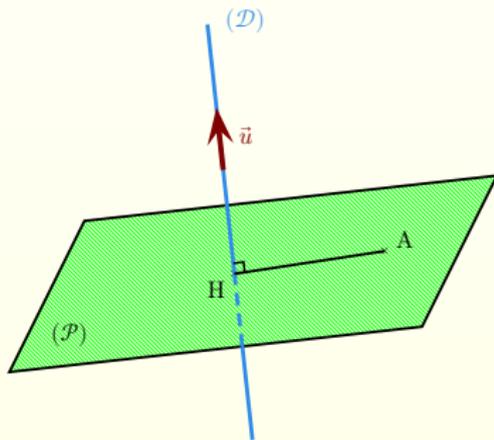


Figure 17 – H est le projeté orthogonal de A sur  $(\mathcal{D})$ .



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

Définition 12 :

Soient  $(\mathcal{P})$  un plan et  $A$  un point de l'espace.

On appelle **distance de  $A$  à  $(\mathcal{P})$** , notée  $d(A; (\mathcal{P}))$ , la plus petite des longueurs  $AM$  où  $M \in (\mathcal{P})$ .

$$d(A; (\mathcal{P})) = \min \{AM, M \in (\mathcal{P})\}.$$

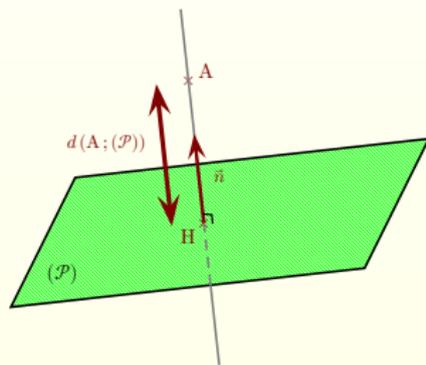


Figure 18 –  $d(A; (\mathcal{P})) = AH$ .



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

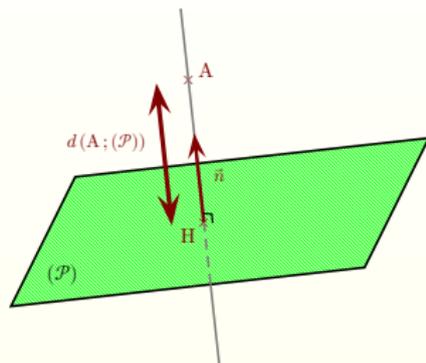


Figure 18 –  $d(A; (\mathcal{P})) = AH$ .

Méthode 2 (Déterminer un projeté orthogonal sur une droite) :

Soient  $(\mathcal{D})$  une droite et  $A$  un point de l'espace.

- 1 On détermine une équation cartésienne du plan  $(\mathcal{P})$  de vecteur normal le vecteur directeur de  $(\mathcal{D})$  passant par  $A$ .
- 2 On trouve le point d'intersection de  $(\mathcal{D})$  et de  $(\mathcal{P})$ .

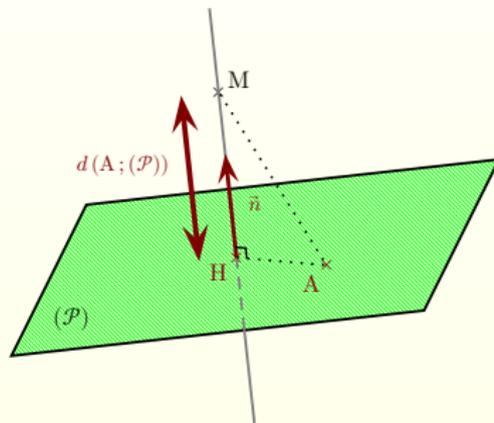
# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

**Théorème 15 :**

Soient  $(\mathcal{P})$  un plan et  $A$  un point de l'espace.

Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(\mathcal{P})$  alors  $d(A; (\mathcal{P})) = AH$ .



**Figure 19** – Distance d'un point à un plan.



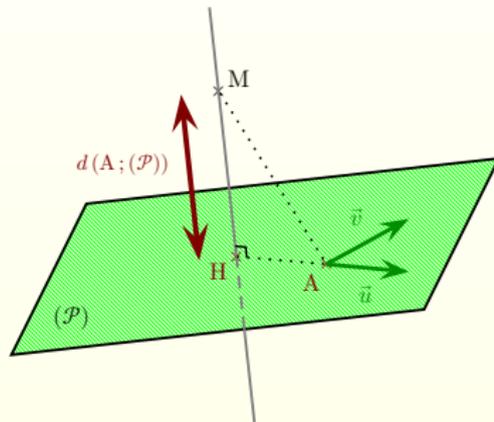
# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

**Théorème 15 :**

Soient  $(\mathcal{P})$  un plan et  $A$  un point de l'espace.

Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(\mathcal{P})$  alors  $d(A; (\mathcal{P})) = AH$ .



**Figure 19** – Distance d'un point à un plan.



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

Proposition 16 :

Soient  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère quelconque et  $M \in \mathcal{E}$ .

**Cas d'un plan défini par un point et un vecteur normal :**

Soit  $(\mathcal{P})$  le plan passant par le point A et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

$$d(M; (\mathcal{P})) = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{AM}|}{\|\vec{n}\|}. \quad (3)$$

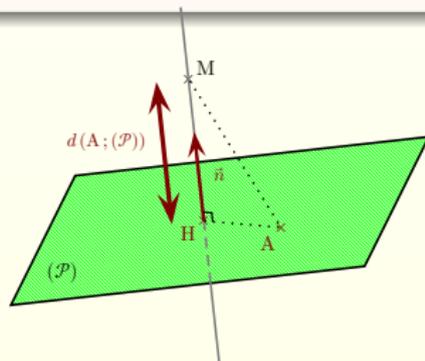


Figure 20 – Distance d'un point à un plan.



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

Proposition 16 :

Soient  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère quelconque et  $M \in \mathcal{E}$ .

**Cas d'un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs :**

Soit  $(\mathcal{P})$  le plan passant par le point  $A$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On note  $(\mathcal{P}) = A + \text{vect } \vec{u}; \vec{v}$ .

$$d(M; (\mathcal{P})) = \frac{|\overrightarrow{[AM; \vec{u}; \vec{v}]}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

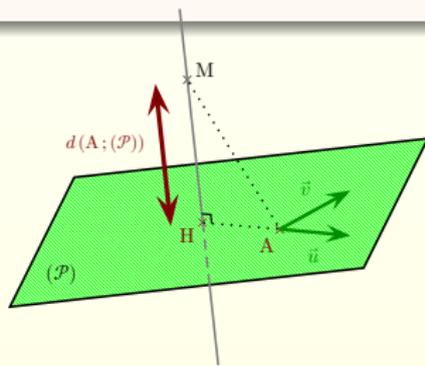


Figure 20 – Distance d'un point à un plan.



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

Exercice II :

Calculer la distance du point  $B(1; 1; 1)$  au plan  $\mathcal{Q}$  représenté par le paramétrage :

$$\begin{cases} x = 2 + s + t \\ y = 3 - s + 2t \\ z = 1 + 2s + t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

Corollaire 4 ( Cas d'un plan défini par une équation cartésienne dans un R.O.N ) :

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère orthonormé.

Soit  $(\mathcal{P})$  le plan d'équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$  où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ .

Pour tout point  $M(x_M; y_M; z_M) \in \mathcal{E}$ , on a :

$$d(M; (\mathcal{P})) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

Exercice 12 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

- 1 Déterminer la distance du point  $A(1, -2, 3)$  au plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x + 3y - 4z - 6 = 0$ .



# VI. Distance

## 2. Distance d'un point à un plan

### Exercice 12 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

- 1 Déterminer la distance du point  $A(1, -2, 3)$  au plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x + 3y - 4z - 6 = 0$ .
- 2 Déterminer la distance du point  $B(1, 1, 1)$  au plan  $\mathcal{Q}$  représenté par la paramétrage :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



# VI. Distance

## 3. Distance d'un point à une droite

Proposition 17 :

Soient  $A, M \in \mathcal{E}$  et  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$  non nul. On considère la droite  $(\mathcal{D}) = A + \mathbb{R}\vec{u}$ .

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

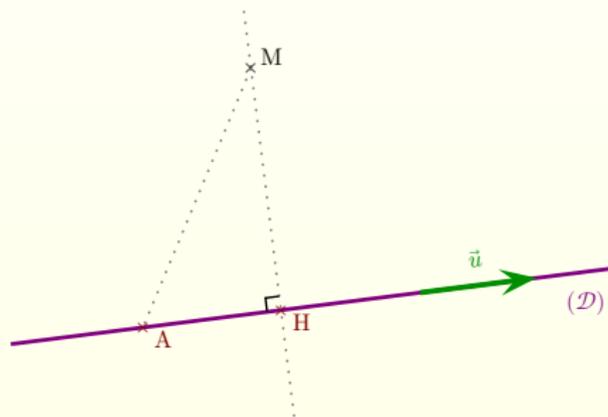


Figure 21 – Distance d'un point à une droite.



# VI. Distance

## 3. Distance d'un point à une droite

### Exercice 13 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

- 1 Déterminer la distance du point  $A(1, -2, 3)$  à la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $C(0, 1, 2)$ , dirigée par  $\vec{u}(4, 3, 1)$ .



# VI. Distance

## 3. Distance d'un point à une droite

### Exercice 13 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

- 1 Déterminer la distance du point  $A(1, -2, 3)$  à la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $C(0, 1, 2)$ , dirigée par  $\vec{u}(4, 3, 1)$ .
- 2 Déterminer la distance du point  $E(1, 0, -1)$  à la droite  $\mathcal{D}'$  donnée par le système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$



# VII. Sphères

- 1 Mode de repérage
- 2 Produit scalaire
- 3 Produit vectoriel
- 4 Déterminant de trois vecteurs
- 5 Droites et plans de l'espace
- 6 Distance
- 7 Sphères**
  - Équations cartésiennes de sphères
  - Intersection Sphère et Droite
  - Intersection Sphère et Plan
  - Intersection de deux sphères



## VII. Sphères

Dans ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé.

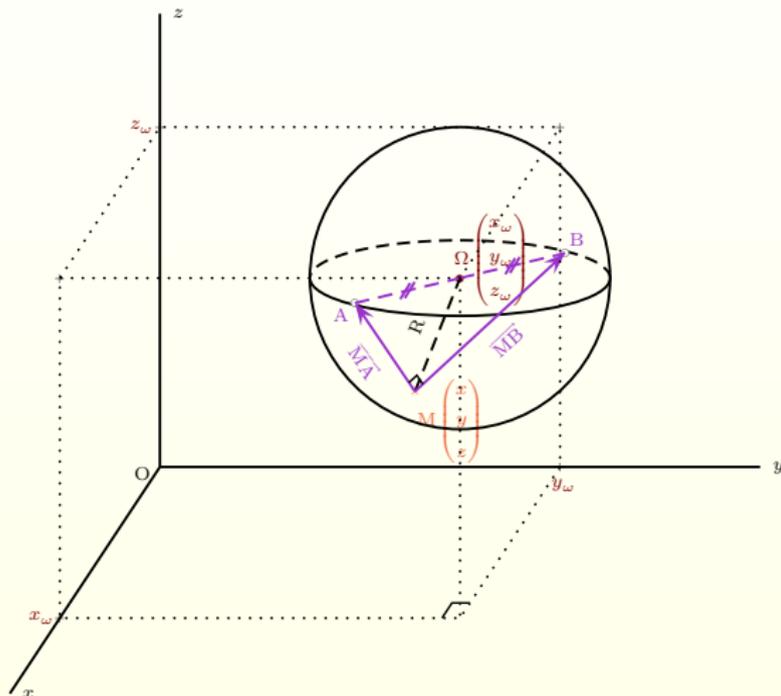


Figure 22 – Sphère de l'espace.



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Proposition 18 :

Soient  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $\Omega(x_\omega; y_\omega; z_\omega)$  où  $(x_\omega; y_\omega; z_\omega) \in \mathbb{R}^3$  et de rayon  $R \geq 0$ .

Soit  $M \in \mathcal{E}$  un point. Alors,

$$M(x; y; z) \in \mathcal{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = R^2.$$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Proposition 18 :

Soient  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $\Omega(x_\omega; y_\omega; z_\omega)$  où  $(x_\omega; y_\omega; z_\omega) \in \mathbb{R}^3$  et de rayon  $R \geq 0$ .

Soit  $M \in \mathcal{E}$  un point. Alors,

$$M(x; y; z) \in \mathcal{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = R^2.$$

La sphère de centre  $\Omega(x_\omega; y_\omega; z_\omega)$  et de rayon  $R$ , ou la sphère de diamètre  $[AB]$  est aussi l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace vérifiant :

$$\Omega M = R \iff \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0.$$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

**Remarques** : On appelle **boule** de centre  $\Omega(x_\omega; y_\omega; z_\omega)$  et de rayon  $R \geq 0$  l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ M(x; y; z) / (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 \leq R^2 \right\}.$$

Plus particulièrement,

- $M(x; y; z)$  est strictement à l'extérieur de la sphère  
 $\mathcal{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 > R^2.$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

**Remarques** : On appelle **boule** de centre  $\Omega(x_\omega; y_\omega; z_\omega)$  et de rayon  $R \geq 0$  l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ M(x; y; z) / (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 \leq R^2 \right\}.$$

Plus particulièrement,

- $M(x; y; z)$  est strictement à l'extérieur de la sphère  
 $\mathcal{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 > R^2.$
- $M(x; y; z)$  est strictement à l'intérieur de la sphère  
 $\mathcal{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 < R^2.$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Exercice 14 :

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

$$\textcircled{1} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Exercice 14 :

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

❶  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$

❷  $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Exercice 14 :

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

❶  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$

❷  $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$

❸  $4y - 4x + 4z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Exercice 14 :

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

- ①  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$       ④  $x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = 0$   
②  $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$   
③  $4y - 4x + 4z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Exercice 14 :

Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

❶  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$

❷  $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$

❸  $4y - 4x + 4z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$

❹  $x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = 0$

❺  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

Proposition 19 :

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels et  $\mathcal{S}$  l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

- Si  $d < a^2 + b^2 + c^2$  alors  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

### Proposition 19 :

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels et  $\mathcal{S}$  l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

- Si  $d < a^2 + b^2 + c^2$  alors  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .
- Si  $d = a^2 + b^2 + c^2$  alors  $\mathcal{S}$  est réduit au point  $\Omega(a; b; c)$ .



# VII. Sphères

## 1. Équations cartésiennes de sphères

### Proposition 19 :

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels et  $\mathcal{S}$  l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

- Si  $d < a^2 + b^2 + c^2$  alors  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .
- Si  $d = a^2 + b^2 + c^2$  alors  $\mathcal{S}$  est réduit au point  $\Omega(a; b; c)$ .
- Si  $d > a^2 + b^2 + c^2$  alors  $\mathcal{S}$  est vide.



## VII. Sphères

### 1. Équations cartésiennes de sphères

Exercice 15 :

Soient  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 1; 3)$ ,  $C(3; 1; 2)$  et  $D(1; 0; -1)$ .

Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.



# VII. Sphères

## 2. Intersection Sphère et Droite

Proposition 20 :

Soient  $\mathcal{S}$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $(\mathcal{D})$  une droite de  $\mathcal{E}$ .

- ④ Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  se coupent en deux points distincts. On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  sont sécants.

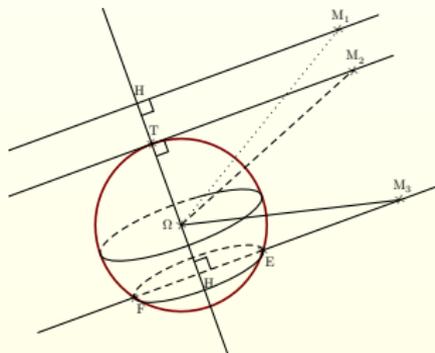


Figure 23 – Intersection d'une sphère et d'une droite.



# VII. Sphères

## 2. Intersection Sphère et Droite

Proposition 20 :

Soient  $\mathcal{S}$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $(\mathcal{D})$  une droite de  $\mathcal{E}$ .

- ① Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  se coupent en deux points distincts.  
On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  sont sécants.
- ② Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  se coupent en un unique point.  
On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  sont tangents.

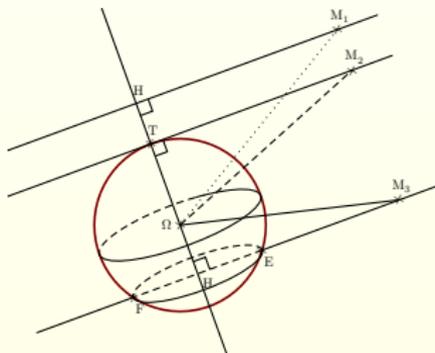


Figure 23 – Intersection d'une sphère et d'une droite.



# VII. Sphères

## 2. Intersection Sphère et Droite

Proposition 20 :

Soient  $\mathcal{S}$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $(\mathcal{D})$  une droite de  $\mathcal{E}$ .

- ① Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  se coupent en deux points distincts.  
On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  sont sécants.
- ② Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  se coupent en un unique point.  
On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  sont tangents.
- ③ Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) > R$  alors  $\mathcal{S} \cap (\mathcal{D}) = \emptyset$ .  
On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{D})$  sont extérieurs.

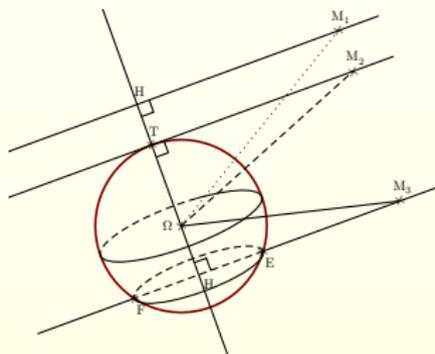


Figure 23 – Intersection d'une sphère et d'une droite.



# VII. Sphères

## 2. Intersection Sphère et Droite

Exercice 16 :

Déterminer les points d'intersection de la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ ,  
 $t \in \mathbb{R}$  et de la sphère d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$ .



# VII. Sphères

## 3. Intersection Sphère et Plan

### Proposition 21 :

Soient  $\mathcal{S}$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $(\mathcal{P})$  un plan de  $\mathcal{E}$ .

- Si  $d(\Omega; (\mathcal{P})) < R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  sont sécants

Dans ce cas,  $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P})$  est un cercle de rayon  $\sqrt{R^2 - d^2}$  et de centre  $H$ , projeté orthogonal de  $\Omega$  sur le plan  $(\mathcal{P})$ .

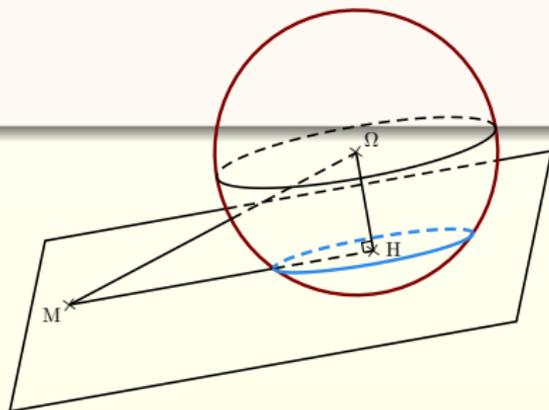


Figure 24 – Intersection d'une sphère et d'un plan.



# VII. Sphères

## 3. Intersection Sphère et Plan

### Proposition 21 :

Soient  $\mathcal{S}$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $(\mathcal{P})$  un plan de  $\mathcal{E}$ .

- ① Si  $d(\Omega; (\mathcal{P})) < R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  sont sécants

Dans ce cas,  $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P})$  est un cercle de rayon  $\sqrt{R^2 - d^2}$  et de centre  $H$ , projeté orthogonal de  $\Omega$  sur le plan  $(\mathcal{P})$ .

- ② Si  $d(\Omega; (\mathcal{P})) = R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  se coupent en un unique point.

On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  sont tangents.

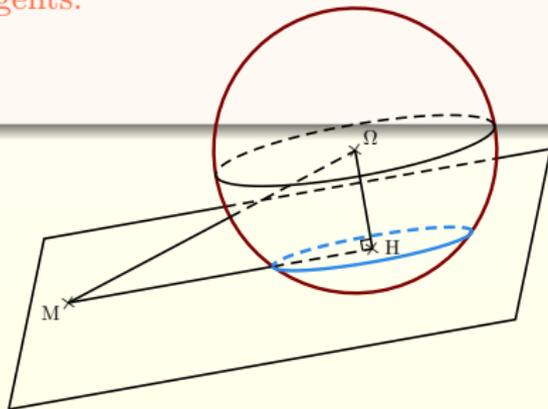


Figure 24 – Intersection d'une sphère et d'un plan.



# VII. Sphères

## 3. Intersection Sphère et Plan

### Proposition 21 :

Soient  $\mathcal{S}$  une sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $(\mathcal{P})$  un plan de  $\mathcal{E}$ .

- 1 Si  $d(\Omega; (\mathcal{P})) < R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  sont sécants  
Dans ce cas,  $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P})$  est un cercle de rayon  $\sqrt{R^2 - d^2}$  et de centre  $H$ , projeté orthogonal de  $\Omega$  sur le plan  $(\mathcal{P})$ .
- 2 Si  $d(\Omega; (\mathcal{P})) = R$  alors  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  se coupent en un unique point.  
On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  sont tangents.
- 3 Si  $d(\Omega; (\mathcal{P})) > R$  alors  $\mathcal{S} \cap (\mathcal{P}) = \emptyset$ .  
On dit que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  sont disjoints.

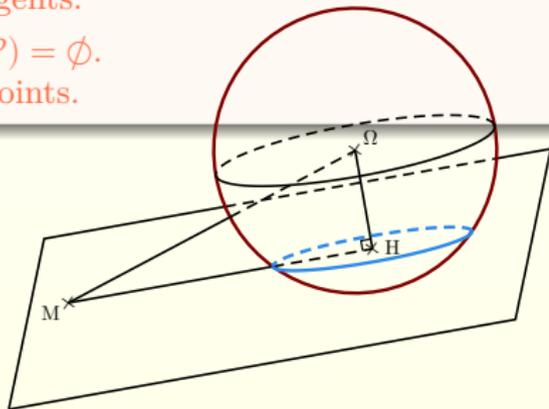


Figure 24 – Intersection d'une sphère et d'un plan.



# VII. Sphères

## 3. Intersection Sphère et Plan

### Exercice 17 :

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé.

Montrer que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  se coupent suivant un cercle dont on donnera le rayon, l'axe et le centre

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) : x + y - 2z - 2 = 0.$$



# VII. Sphères

## 3. Intersection Sphère et Plan

### Exercice 17 :

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé.

Montrer que  $\mathcal{S}$  et  $(\mathcal{P})$  se coupent suivant un cercle dont on donnera le rayon, l'axe et le centre

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) : x + y - 2z - 2 = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) : x + y - 2z - 2 = 0.$$



# VII. Sphères

## 4. Intersection de deux sphères

Proposition 22 :

Soient deux sphères  $\mathcal{S}(\Omega; R)$  et  $\mathcal{S}'(\Omega'; R')$  de centres distincts.

Alors :  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset \iff |R - R'| \leq d(\Omega; \Omega') \leq R + R'$ .

Plus précisément :

- Si  $d(\Omega; \Omega') = R + R'$  alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de  $(\Omega\Omega')$ .

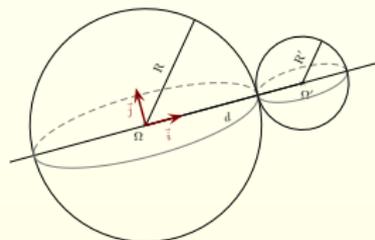


Figure 25 –  $d(\Omega; \Omega') = R + R'$ .



# VII. Sphères

## 4. Intersection de deux sphères

Proposition 22 :

Soient deux sphères  $\mathcal{S}(\Omega; R)$  et  $\mathcal{S}'(\Omega'; R')$  de centres distincts.

Alors :  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset \iff |R - R'| \leq d(\Omega; \Omega') \leq R + R'$ .

Plus précisément :

- Si  $d(\Omega; \Omega') = R + R'$  alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de  $(\Omega\Omega')$ .
- Si  $d(\Omega; \Omega') = |R - R'|$  alors les deux sphères sont tangentes intérieurement. Leur intersection est réduite à un point de  $(\Omega\Omega')$ .

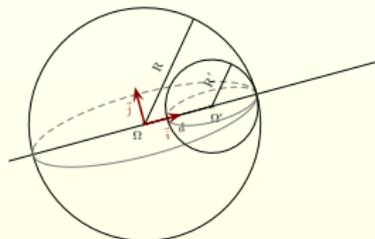


Figure 26 –  $d(\Omega; \Omega') = |R - R'|$ .



# VII. Sphères

## 4. Intersection de deux sphères

### Proposition 22 :

Soient deux sphères  $\mathcal{S}(\Omega; R)$  et  $\mathcal{S}'(\Omega'; R')$  de centres distincts.

Alors :  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset \iff |R - R'| \leq d(\Omega; \Omega') \leq R + R'$ .

Plus précisément :

- Si  $d(\Omega; \Omega') = R + R'$  alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de  $(\Omega\Omega')$ .
- Si  $d(\Omega; \Omega') = |R - R'|$  alors les deux sphères sont tangentes intérieurement. Leur intersection est réduite à un point de  $(\Omega\Omega')$ .
- Si  $|R - R'| < d(\Omega; \Omega') < R + R'$  alors les deux sphères sont sécantes. Leur intersection est un cercle d'axe  $(\Omega\Omega')$ .

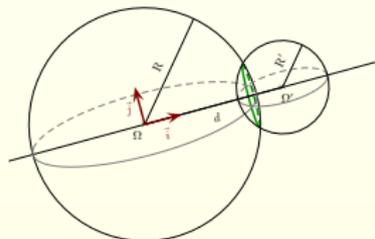


Figure 27 -  $|R - R'| < d(\Omega; \Omega') < R + R'$ .



# VII. Sphères

## 4. Intersection de deux sphères

### Proposition 22 :

Soient deux sphères  $\mathcal{S}(\Omega; R)$  et  $\mathcal{S}'(\Omega'; R')$  de centres distincts.

Alors :  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset \iff |R - R'| \leq d(\Omega; \Omega') \leq R + R'$ .

Plus précisément :

- Si  $d(\Omega; \Omega') = R + R'$  alors les deux sphères sont tangentes extérieurement. Leur intersection est réduite à un point de  $(\Omega\Omega')$ .
- Si  $d(\Omega; \Omega') = |R - R'|$  alors les deux sphères sont tangentes intérieurement. Leur intersection est réduite à un point de  $(\Omega\Omega')$ .
- Si  $|R - R'| < d(\Omega; \Omega') < R + R'$  alors les deux sphères sont sécantes. Leur intersection est un cercle d'axe  $(\Omega\Omega')$ .

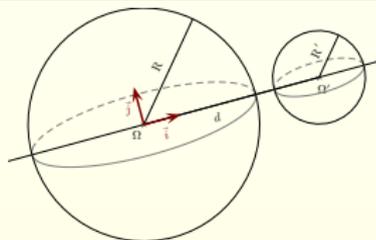


Figure 28 -  $d(\Omega; \Omega') > R + R'$ .

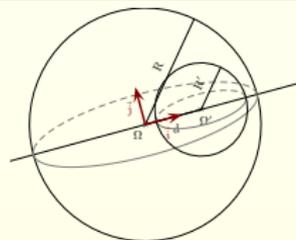


Figure 29 -  $0 < d(\Omega; \Omega') < |R - R'|$ .

