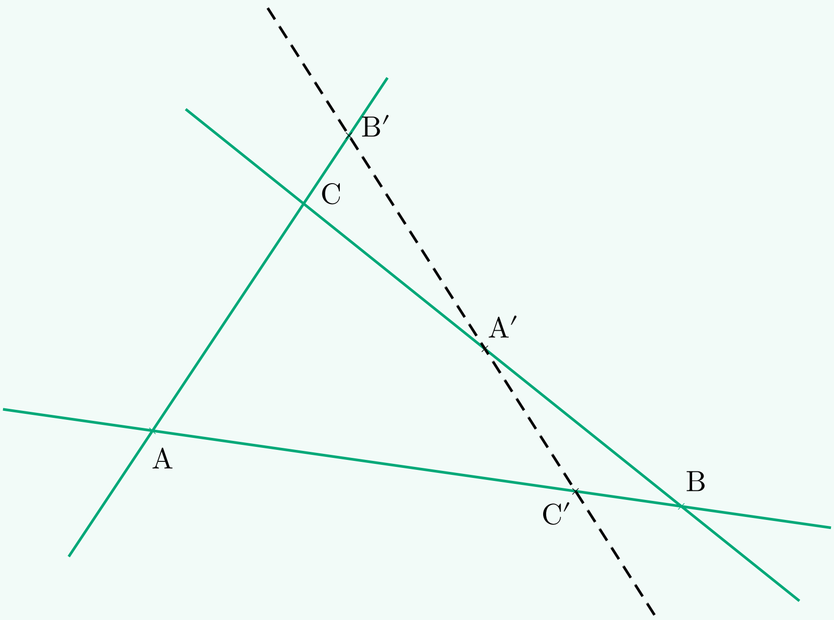
Géométrie du plan

Exercice 1 (Théorème de Ménélaüs) : Soient ABC un triangle de $\mathscr{P}$, et A', B' et C' des points appartenant respectivement aux droites $(\mathrm{BC}), (\mathrm{AC})$ et (AB) et distincts des sommets de ABC.

Montrer que les points A', B' et C' sont alignés si, et seulement si $\dfrac{\overline{\mathrm{A'B}}}{\overline{\mathrm{A'C}}} \cdot \dfrac{\overline{\mathrm{B'C}}}{\overline{\mathrm{B'A}}} \cdot \dfrac{\overline{\mathrm{C'A}}}{\overline{\mathrm{C'B}}} = 1$.

On utilisera le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$.

Correction : Une telle droite s'appelle une *ménélienne*.



Exercice 2 (Existence de l'orthocentre) :

1. Montrer que pour tous points A, B, C et D de $\mathcal{P}$, on a l'égalité :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0.$$

2. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 3 : Calculer l'aire du triangle ABC où $\mathrm{A}\,(1\,;2)$, $\mathrm{B}\,(2\,;3)$ et $\mathrm{C}\,(3\,;0)$.

Exercice 4 : Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère un point $\mathrm{A}_\lambda\,(\lambda\,;0)$ de l'axe $(\mathrm{O}x)$ et un point $\mathrm{B}_\lambda\,(0\,;a-\lambda)$ de l'axe $(\mathrm{O}y)$.

1. Justifier que les points A_λ et B_λ sont distincts puis déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[A_\lambda B_\lambda]$.
2. Montrer que, lorsque λ varie, cette médiatrice passe toujours par un point fixe.

Exercice 5 : Soit ABC un triangle.

1. (a) Démontrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.
   (b) On note H le point d'intersection des hauteurs issues de B et de C.

   Démontrer en utilisant l'égalité précédente que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
   (c) En déduire que, dans tout triangle, les trois hauteurs sont concourantes.
2. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC où :

$$A\,(-1\,;1)\,,\qquad B\,(3\,;-1)\quad \text{et}\quad C\,(1\,;4)\,.$$

Exercice 6 : On considère la famille de droites $\mathcal{D}_\lambda : x+\lambda y+1=0$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ et la droite (Δ) d'équation $2x-3y+1=0$.

1. Vérifier que les droites $\mathcal{D}_\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, passent par un même point A dont on donnera les coordonnées.
2. Parmi ces droites, y en a-t-il une qui soit parallèle à l'axe (Ox) ?
3. Parmi ces droites, y en a-t-il une qui soit parallèle à l'axe (Oy) ?
4. Parmi ces droites, y en a-t-il une qui soit parallèle, confondue ou perpendiculaire à la droite (Δ) ?

Exercice 7 : On se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}=\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ orthonormé.

1. Déterminer la distance du point A à la droite (BC) où $A\,(3\,;3)$, $B\,(2\,;1)$ et $C\,(1\,;2)$.
2. En déduire l'aire du triangle ABC.
3. Retrouver déduire l'aire du triangle ABC par une autre méthode.

Exercice 8 : Soient $A(1;1), B(1;2)$ et $C(0;1)$.

1. Déterminer les équations cartésiennes et paramétrées des droites (AB), (AC), (BC), de la droite passant par A et orthogonale à (BC), de la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que (AB) est orthogonale à (AC).
3. Déterminer la distance de A à (BC).

Exercice 9 : Les questions sont indépendantes.

1. Soient $\mathcal{D}_1 : x+2y-5=0$ et $\mathcal{D}_2 : 4x+2y+1=0$.

   Déterminer le lieu des points M du plan tels que $d\,(M\,;\mathcal{D}_1)=2d\,(M\,;\mathcal{D}_2)$.
2. Déterminer les équations des bissectrices de $\mathcal{D}_1 : 3x-4y+4=0$ et $\mathcal{D}_2 : 12x+5y-5=0$.

Aide : La bissectrice de deux droites est l'ensemble des points équidistants de ces droites.

Exercice 10 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère les points $\mathrm{A}(-1;1), \mathrm{B}(3;-1)$ et $\mathrm{C}(1;4)$.

1. Préciser les coordonnées du projeté H du point C sur la droite (AB).
2. Calculer la distance de C à la droite (AB).
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H' de ABC.

Exercice 11 : Soient $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les droites d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} (\mathscr{D}) : \ 3x - 4y + 1 = 0 \\ (\mathscr{D}') : \ 12x + 5y - 7 = 0 \end{cases}$$

Déterminer les équations des bissectrices du couple de droites $((\mathscr{D})\,;(\mathscr{D}'))$.

Exercice 12 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on donne $\mathrm{A}(1;1), \mathrm{B}(3;7)$ et $\mathrm{C}(-1;3)$.

1. Quelle est la nature de ABC ?
2. Déterminer les équations cartésiennes des côtés du triangle ABC.
3. Déterminer la bissectrice de (AC) et (BC).
4. Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit à ABC.

Exercice 13 : Pour a, b réels donnés, calculer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$.

Correction : La courbe d'équation $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (a+b)x + ab = 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

est le demi-cercle supérieur de diamètre $\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ ou de centre $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;0\right)$ et de rayon $\dfrac{|b-a|}{2}$.

Par suite, si $a \leqslant b$, $\mathrm{I} = \dfrac{\pi \mathrm{R}^2}{2} = \dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a > b$, $\mathrm{I} = -\dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$.

Exercice 14 : Soit I milieu de [AB].

1. Montrer que pour tout point M du plan, $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 2\mathrm{MI}^2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2$.
2. En déduire le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \mathrm{AB}^2$.

Géométrie du plan

Exercice 15 : On se place dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ orthonormé.

Soient $\Omega\,(3\,;1)$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon 2.

Déterminer les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par O.

Exercice 16 : Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ et A le point de coordonnées $(1; 3)$.

Justifier que A est un point extérieur à $\mathcal{C}$ et donner l'équation des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.

Exercice 17 : Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $\mathrm{R} > 0$ et un point $\mathrm{M}(a, b)$ tel que $\mathrm{OM} > \mathrm{R}$. Soit $\vec{u}(\alpha, \beta)$ de norme 1.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\vec{u}$ pour que la droite passant par M et dirigée par $\vec{u}$ soit tangente au cercle.
2. Sous quel angle apparent voit-on le cercle depuis le point M ?

Exercice 18 : Bataille navale géométrique : chacun définit une figure géométrique (par exemple un cercle et deux droites). Pour deviner la figure de son adversaire, il tire des droites. Son adversaire lui indique tous les points d'intersection avec sa figure.

Exercice 19 : Soient $\mathrm{A}(1; 3)$ et $\mathrm{B}(2; 1)$.

1. Déterminer l'équation du cercle de diamètre [AB]
2. Déterminer le cercle de centre A et de rayon 2.
3. Déterminer l'intersection de ces deux cercles.

Exercice 20 : Déterminer l'ensemble des points M du plan P dont l'affixe z vérifie :

$$|(1 + i)z - 3 + 3i|^2 + |z - 6|^2 = 54.$$