

Géométrie de l'espace

I/ Repérage, produit scalaire, produit mixte _____

Exercice 1 : Soient A, B, C, D quatre points de l'espace tels que (AB) et (CD) sont sécantes en I. Déterminer le lieu des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.

Correction : Sans calcul, $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ est orthogonal au plan (MAB), $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$ est orthogonal au plan (MCD).

On cherche donc les points M pour que les plans (MAB) et (MCD) soient parallèles. Strictement parallèle est exclu, puisqu'ils ont M en commun.

On cherche donc les points M tels que les plans (MAB) et (MCD) soient confondus : c'est le plan contenant les droites (AB) et (CD) donc le plan (AIC).

Exercice 2 : (Questions indépendantes)

1. Soient $\vec{a}(2; 3; -1)$ et $\vec{b}(1; 4; -2)$. Calculer $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} - \vec{b})$.
2. Soient $\vec{a}(3; -1; 2)$, $\vec{b}(2; 1; -1)$ et $\vec{c}(1; -2; 2)$.

Calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ et $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Conclusion ?

3. Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{a}(2; -6; -3)$ et $\vec{b}(4; 3; -1)$.

Exercice 3 : Soient $\vec{a}(1; 1; 2)$, $\vec{b}(3; 2; 2)$ et $\vec{c}(1; -1; m)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4 : Dans une base orthonormée directe, on considère $\vec{u}(1; 0; \lambda)$, $\vec{v}(\mu; 2; 3)$ et $\vec{w}(0; 1; 1)$.

Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

Exercice 5 : On se place dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

1. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs de l'espace.

(a) Montrer la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}.$$

(b) Montrer que :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{a} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{d}.$$

2. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2$

II/ Droites et plans

Exercice 6 (Plan médiateur) : Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{E}$ et I le milieu du segment [AB].

Montrer que le lieu des points équidistants de A et B est le plan passant par I et orthogonal à (AB).

Ce plan est appelé *plan médiateur* du segment [AB].

Exercice 7 : Déterminer pour chacun des plans une équation cartésienne.

Soient A(1; 2; 0), B(-1; 3; 1), C(0, 0, 1) et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Le plan (ABC).
2. $\mathcal{P}$ passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$.
3. Le plan médiateur de [AB].

Exercice 8 : Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans suivants :

1. $(\mathcal{P}) : x - 3y + 2z - 5 = 0$ et $(\mathcal{P}') : 2x + y + 7z - 1 = 0$.
2. $(\mathcal{P}) : x + y - z = 0$ et $(\mathcal{P}') : 2x - y - z - 1 = 0$.
3. $(\mathcal{P}) : x + y + 2z - 3 = 0$ et $(\mathcal{P}') : -x + 4y - 5z + 6 = 0$.
4. $(\mathcal{P}) : x - 2z - 1 = 0$ et $(\mathcal{P}') : y - 2z + 4 = 0$.
5. $(\mathcal{P}) : 2x - y - 2z - 1 = 0$ et $(\mathcal{P}') : -x + 4y + z - 3 = 0$.

Correction :

1. Les vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas colinéaires donc les plans sont sécants en une droite $(\mathcal{D})$.

L'idée est toujours la même : traduire au niveau des coordonnées les propriétés d'un point quelconque de la droite.

$$M(x; y; z) \in (\mathcal{D}) \iff \begin{cases} M \in (\mathcal{P}) \\ M \in (\mathcal{P}') \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 & (L_1) \\ 2x + y + 7z - 1 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

Étant donné que c'est un système à 3 inconnues pour deux équations, nous ne trouverons pas une solution unique. On exprime deux des inconnues en fonction de la troisième qui jouera le rôle du paramètre.

$$\begin{cases} 7x + 23z - 8 = 0 & (L_1) + 3 \times (L_2) \\ 7y + 3z + 9 = 0 & (L_2) - 2 \times (L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{8}{7} - \frac{23}{7}z \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}z \end{cases}$$

En posant $z = t$, une représentation de $(\mathcal{D})$ peut être :

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = \frac{8}{7} - \frac{23}{7}t \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Idem...

Exercice 9 : Déterminer l'intersection des plans $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{R})$ avec :

1. $(\mathcal{P}) : 3x + 3y + z + 2 = 0$, $(\mathcal{Q}) : y + z - 5 = 0$ et $(\mathcal{R}) : 2z - 8 = 0$.
2. $(\mathcal{P}) : 4x + 3y + z + 2 = 0$, $(\mathcal{Q}) : x + 2y + z - 5 = 0$ et $(\mathcal{R}) : 3x + 5y + 2z - 9 = 0$.

Exercice 10 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1. Déterminer un paramétrage puis un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

2. Déterminer un système d'équations cartésiennes et un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}'$ l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ tels que :

- $\mathcal{P}$ passe par $A(1, 1, 0)$ et est normal au vecteur $\vec{u}(1, 0, -2)$.
- $\mathcal{P}'$ passe par $B(2, 0, 1)$ et est dirigé par les vecteurs $\vec{v}(2, 2, 2)$ et $\vec{w}(3, 1, 1)$.

3. Soit δ l'intersection des plans d'équations $x - z - 2 = 0$ et $y = z - 1$.

$\mathcal{D}'$ et δ sont-elles coplanaires ?

Exercice 11 : Soit $(\mathcal{D}) = A + \text{vect } \vec{u}$ où $A(0; 1; 2)$ et $\vec{u}(-1; 1; 1)$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par $A(5; 1; -2)$, dirigé par les vecteurs $\vec{v}(1; 1; 0)$ et $\vec{w}(3; 4; -1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ et de $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ et un système d'équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$.

3. Montrer que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ ne sont pas parallèles. Déterminer $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{P})$.

Exercice 12 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur λ pour que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}_\lambda)$ d'équations respectives

$$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_\lambda) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 2z = \lambda \end{cases}$$

soient coplanaires.

Dans ce cas, donner une équation du plan qui les contient.

Exercice 13 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le plan $(P_\lambda) : 2\lambda x + (\lambda + 1)y - 3(\lambda - 1)z + 2\lambda + 4 = 0$.

Montrer que ces plans contiennent tous une même droite $(\mathcal{D})$.

Exercice 14 : On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A $(5; 1; 3)$ sur le plan $(\mathcal{P})$.

Correction : H $(2; 0; 4)$.

Exercice 15 : Déterminer le projeté orthogonal de M $(4; 8; 0)$ sur le plan $(\mathcal{P}) : x + 3y + 2z = 0$.

Exercice 16 : Soient A $(0; 2; -1)$ et B $(4; 4; 3)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$.

Exercice 17 : On considère trois points de l'espace F $(0; -1; 1)$, G $(2; -1; 3)$ et H $(4; -5; 3)$ et un plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x - y + 2z + 3 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées des points P, Q et R, projetés orthogonaux respectifs des points F, G et H sur le plan P.
2. Calculer $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$.
3. Peut-on dire que la projection orthogonale conserve les angles ? Justifier.

Exercice 18 : Déterminer la distance du point M $(-1; -1; 2)$:

1. Au plan $(\mathcal{P}) : 5x - 3y + z = 1$.
2. À la droite $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}')$ où $(\mathcal{P}') : y + 3z = 3$.

III/ Sphères _____

Exercice 19 : Déterminer une équation cartésienne de la sphère dans chacun des cas suivants :

1. Sphère de centre $\Omega(-2; 0; 1)$ et de rayon 3.
2. Sphère de diamètre $[AB]$ où $A(1; -1; 2)$ et $B(0; 2; -2)$.
3. Sphère passant par O , de centre $A(-8; 6; 2)$.
4. Sphère passant par O , $A(2; 1; 0)$, $B(0; 3; 5)$ et $C(4; 0; 4)$.
5. Sphère passant par $A(2; 3; 5)$, $B(1; 1; 2)$, $C(3; -2; 4)$ et dont le centre appartient au plan d'équation $x + y + z = 10$.
6. Sphère tangente au plan d'équation cartésienne $x + y + z = 6$ et de centre $\Omega(3; 4; 5)$.

Exercice 20 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Déterminer une équation de la sphère de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

Exercice 21 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Reconnaitre les deux courbes données, et déterminer leur intersection :

1. $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ et $P : x - 2y + z - 2 = 0$.
2. $S' : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ et $Q : x + y - 2z - 2 = 0$.
3. $P : 5x - 2y = 7$ et $P' : -x + 3y - z - 1 = 0$.
4. $S'' : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$ et $\delta : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$