# Matrices et applications linéaires

**Nom :** ........................... **Prénom :** ...........................

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'application linéaire

$$f(x\,;y\,;z) = (x - 2y - 2z\,; -2x + y + 2z\,; 2x - 2y - 3z.)$$

1. Compléter :
   (a) $f(e_1) = $ ...........
   (b) $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$. En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................

3. On a $\mathrm{A} + \mathrm{I}d = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

   Compléter :
   (a) $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} + \mathrm{I}d) = \ldots$
   (b) Une base de $\ker\,(f + \mathrm{I}_d)$ est donc donnée par les vecteurs $e'_1 = \ldots + e_2$ et $e'_2 = \ldots - e_3$.
   (c) $f(e'_1) = \ldots\ldots$
4. En résolvant un système linéaire, déterminer une base de $\ker\,(f - \mathrm{I}_d)$. On notera $e'_3$ le générateur trouvé.

   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................
   ...........................................................................................



F. PUCCI Lycée Jules Garnier

5. (a) En admettant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, justifier que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1\,;e'_2\,;e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

(b) Donner $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

6. Déteminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Donnez une interprétation géométrique de $f$.

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

*Deux mathématiciens étudient la convergence d'une série.*
*Le premier dit :*

*« Tu te rends compte que cette série converge même quand tous les termes sont rendus positifs ? »*

*Le second demande :*

*« Tu en es sûr ?*

*- Absolument ! »*

# *Matrices et applications linéaires*

**Nom :** ............................ **Prénom :** ............................

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+2y\,;-y\,;-2x-2y-z)\,. \end{array}$$

1. Compléter :
   (a) $f(e_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
   (b) $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$
2. Déterminer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$. En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

3. On a $\mathrm{A} + \mathrm{I}d = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Compléter :
   (a) $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} + \mathrm{I}d) = \ldots$
   (b) Une base de $\ker\,(f + \mathrm{I}_d)$ est donc donnée par les vecteurs $e'_1 = \ldots - e_2$ et $e'_2 = \ldots$.
   (c) $f(e'_1) = \ldots\ldots$
4. En résolvant un système linéaire, déterminer une base de $\ker\,(f - \mathrm{I}_d)$. On notera $e'_3$ le générateur trouvé.

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

.............................................................................................

Matrices et applications linéaires

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

5. (a) En admettant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, justifier que la famille $\mathcal{B}' = (e_1' \,; e_2' \,; e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(b) Donner $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Donnez une interprétation géométrique de $f$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*C'est l'histoire de deux belles fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathrm{I}$, telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.*

*« Regardez-moi, comme je suis belle ! dit $g(x)$.*

*- Oui mais tu as tout copié sur moi...répond $f(x)$. »*

*$g$, vexée, revient le lendemain.*

*« Salut, alors ? lance $g(x+h)$.*

*- Mais, qu'est ce que tu as ? demande $f(x)$.*

*- Bah j'essaie de me différentier...»*