Matrices et applications linéaires

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'application linéaire

$$f(x\,;y\,;z) = (x - 2y - 2z\,; -2x + y + 2z\,; 2x - 2y - 3z.)$$

1. Compléter :
   (a) $f(e_1) = (1\,;-2\,;2)$
   (b) $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$. En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

   Par opérations élémentaires, on a successivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donc, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 3$ *i.e.* l'endomorphisme f est bijectif. Une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ est donc formée par les colonnes de A soit $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$.

3. On a $\mathrm{A} + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

   Compléter :
   (a) $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} + \mathrm{Id}) = 1$.
   (b) Une base de $\ker\,(f + \mathrm{I}_d)$ est donc donnée par les vecteurs $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = e_2 - e_3$.
   (c) $f(e'_1) = -e'_1$.
4. En résolvant un système linéaire, déterminer une base de $\ker\,(f - \mathrm{I}_d)$. On notera e'_3 le générateur trouvé.

   $\mathrm{A} - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker\,(f - \mathrm{Id}) \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

   Une base de $\ker\,(f - \mathrm{I}_d)$ est donc donnée par le vecteur non nul $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) En admettant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, justifier que la famille $\mathcal{B}' = (e_1' \,;\, e_2' \,;\, e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   La matrice de ces trois vecteurs est inversible donc ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donner $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Déteminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Donnez une interprétation géométrique de f.

   Par définition des vecteurs de $\mathcal{B}'$, on a :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   C'est une symétrie de base vect $(e_1', e_2') = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et de direction vect $(e_3') = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Deux mathématiciens étudient la convergence d'une série.
Le premier dit :

« Tu te rends compte que cette série converge même quand tous les termes sont rendus positifs ? »

Le second demande :

« Tu en es sûr ?

- Absolument ! »

Matrices et applications linéaires

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+2y\,;-y\,;-2x-2y-z)\,. \end{array}$$

1. Compléter :
   (a) $f(e_1) = (1\,;0\,;-2)$
   (b) $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$. En déduire une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

   S'il fallait faire des opérations élémentaires, on aurait :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Donc, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 3$ *i.e.* l'endomorphisme f est bijectif. Une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ est donc formée par les colonnes de A soit $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
3. On a $\mathrm{A} + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Compléter :
   (a) $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} + \mathrm{Id}) = 1$.
   (b) Une base de $\ker\,(f + \mathrm{I}_d)$ est donc donnée par les vecteurs $e'_1 = e_1 - e_2$ et $e'_2 = e_3$.
   (c) $f(e'_1) = -e'_1$.
4. En résolvant un système linéaire, déterminer une base de $\ker\,(f - \mathrm{I}_d)$. On notera e'_3 le générateur trouvé.

   $\mathrm{A} - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker\,(f - \mathrm{Id}) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Matrices et applications linéaires

3

Une base de $\ker(f - \mathrm{I}_d)$ est donc donnée par le vecteur non nul $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Commentaires : *En mieux, la matrice est clairement de rang supérieur à 2 et il est tout aussi clair que* $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_3 = 0$ *pour arriver au même résultat.*

5. (a) En admettant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, justifier que la famille $\mathcal{B}' = (e_1' \,;e_2' \,;e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   La matrice de ces trois vecteurs est inversible donc ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donner $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Donnez une interprétation géométrique de f.

Par définition des vecteurs de $\mathcal{B}'$, on a :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une symétrie de base $\mathrm{vect}\,(e_1', e_2') = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et de direction $\mathrm{vect}\,(e_3') = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

C'est l'histoire de deux belles fonctions f et g définies sur I, *telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.*

« Regardez-moi, comme je suis belle ! dit $g(x)$.

- Oui mais tu as tout copié sur moi...répond $f(x)$. »

g, vexée, revient le lendemain.

« Salut, alors ? lance $g(x+h)$.

- Mais, qu'est ce que tu as ? demande $f(x)$.

- Bah j'essaie de me différentier...»