Séries et Matrices et applications linéaires

1. **Séries numériques**
   - Définitions : série, terme général d'une série, somme partielle, convergence, divergence, somme totale.
   - Deux séries qui coïncident à partir d'un certain rang ont même nature.
   - En cas de convergence, définition du reste d'ordre n.$R_n = S - S_n$ et $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - En cas de convergence, le terme général tend vers 0 . Divergence grossière. Réciproque fausse.
   - L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel. Linéarité de la somme.
   - Séries géométriques, séries télescopiques, série exponentielle.
   - Théorème de comparaison série-intégrale. Séries de Riemann.
   - Séries à termes positifs : théorème de comparaison.
   - Deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents ont même nature.
   - Convergence absolue : définition, CVA $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire de la somme.
   - Série dominée ou négligeable devant une série absolument convergente.

2. **Applications linéaires**
   - Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base. Notation mat $\mathscr{B}(\mathscr{F})$. Matrice d'une application linéaire dans deux bases $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$.

     Notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f), \mathrm{mat}\,\mathscr{B}_E(f)$
   - À $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

     Conséquences : linéarité, unicité de la matrice associée, de l'application linéaire associée lorsque les bases sont données.

     Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$.
   - Cas d'un espace vectoriel avec une base canonique. Matrice/application linéaire canoniquement associée.
   - Formule $Y = AX$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$ traduisant l'évaluation $y = f(x)$.
   - Matrice de la composée de deux applications linéaires. Matrice de f^k.
   - Matrice d'un isomorphisme. Matrice de l'inverse. Une famille est une base si, et seulement si sa matrice dans une base est inversible.
   - Matrice de passage. Notation $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \mathrm{mat}\,\mathscr{B}\,(\mathscr{B}')$.

     Inverse, composition.

     Formule $X = PX'$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Formule de changement de bases $D = P^{-1}AQ$ ou $A = PDQ^{-1}$ i.e.
     $$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E} \text{ ou}$$
     $$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}.$$
   - Noyau, image, rang d'une matrice (définition avec la dimension de l'image coïncidant avec la définition du nombre de pivots).
   - Conservation du rang par des opérations élémentaires.
   - Théorème du rang et caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le noyau ou l'image ou le rang.

3. **Variables aléatoires**
   - Loi d'une variable aléatoire
     - Loi $\mathrm{P}_{\mathbb{X}}$ d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ à valeurs dans E.
     - Variable aléatoire $f(\mathrm{X})$.
     - Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E : $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathscr{U}(\mathrm{E})$.
     - Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$: $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$.
     - Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0\,;1]$: $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathscr{B}(n\,;p)$.
     - Loi conditionnelle d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ sachant un événement A.
     - Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
   - Variables aléatoires indépendantes
     - Distribution de probabilités de $(\mathbb{X}\,;\mathbb{Y})$.
     - Extension aux n-uplets de variables aléatoires. M
     - Somme de n variables indépendantes suivant une loi $\mathscr{B}(p)$.
     - Image de variables aléatoires indépendantes.
     - Lemme des coalitions (admis). Extension au cas de plus de deux coalitions
   - Espérance d'une variable aléatoire réelle : $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \displaystyle\sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$.
     - Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
     - Variable aléatoire centrée.
     - Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.
     - Formule de transfert : $\mathrm{E}(f(\mathbb{X})) = \displaystyle\sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} f(x)\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$.
     - Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
   - Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance
     - Variable aléatoire réduite. Lien avec les transformations affines.
     - Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.
     - Covariance de deux variables aléatoires. Cas de deux variables indépendantes.
     - Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.
   - Inégalités probabilistes
     - Inégalité de Markov.
     - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
     - Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi.
     - Interprétation fréquentiste.

Questions de cours possibles [1] :

1. L'application $\begin{array}{rccc} \mathrm{P}_{\mathbb{X}} : & \mathbb{X}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) \end{array}$ définit une probabilité.
2. $(\star)$ Formule de transfert.
3. Inégalité de Markow et interprétation.
4. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et interprétation.
5. L'espérance d'une variable aléatoire suivant une $\mathscr{B}(n, p)$ est np.
6. $(\star)$ Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$. Alors $\mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Séries et Matrices et applications linéaires

7. Nature des séries de Riemann
8. Théorème de comparaison pour les séries à terme positif.
9. Pour $(\mathrm{E}\,;\mathscr{B})$ et $(\mathrm{F}\,;\mathscr{B}')$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) \end{array}$ est un isomorphisme.
10. Pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$ et $(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ une famille d'éléments de E.
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \text{ est inversible } \iff (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de E.}$$
11. $(\star)$ Critère spécial des séries alternées et exemple de série semi-convergente.
12. $(\star)$ Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$. En notant, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$, alors :
$$\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.