Fichiers `Variables-aleatoire` a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : J'ai dans ma cave six tonneaux indiscernables, trois de bourgogne et quatre de bordeaux.

Si je veux tirer du bourgogne, combien devrai-je goûter en moyenne de tonneaux ?

Exercice 2 : Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc 15 dromadaires, 10 chameaux et 5 lamas.

Un visiteur prend sur la même photo trois camélidés au hasard. Sachant que tous ces ongulés ont la même probabilité d'être photographiés, établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bosses sur la photo.

Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 3 : On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = \mathrm{X})$.
3. Quelle est la loi de Y ?
4. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{Y})$.

Exercice 4 : Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Correction :

1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. On obtient $\mathrm{P(A)} = 1 - (\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $\mathrm{P(B)} = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.
2. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

Exercice 5 : Un avion peut accueillir 20 personnes; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20».

1. Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale)
2. quelle est son espérance, son écart-type ?
3. Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Correction : Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15} 0.75^{15} 0.25^5 = 0.202\,33$.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Quelle est la probabilité p_n d'obtenir exactement n *Pile* en lançant $2n$ pièces de monnaie ?

Exercice 2 : Soient X, Y deux variable aléatoires réelles. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{T} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

1. Montrer que si Z et T sont indépendantes, $\mathrm{V(X)} = \mathrm{V(Y)}$.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi prenant les valeurs $1, 2, 3$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
   (a) Monter que $\mathrm{V(X)} = \mathrm{V(Y)}$.
   (b) Déterminer les lois de Z et de T. Z et T sont-elles indépendantes ?
   (c) Conclure.

Exercice 3 : Soit P une probabilité sur l'univers $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Pour tout $k \in \Omega$, on note $p_k = \mathrm{P}(\{k\})$. On définit sur Ω deux variables aléatoires X, Y par $\mathrm{X}(\{k\}) = \frac{1}{24}(k^2 - k)(-k^2 + 8k + 17) + 1$ et $\mathrm{Y}(\{k\}) = k^2(5k^2 - 17)$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ et Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{-12, 0, 12\})$.

1. Montrer que $p_{-1} = \dfrac{1}{4}$ et $p_0 = \dfrac{1}{3}$.
2. En déduire p_1 et p_2.

Exercice 4 : L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction : La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[\mathrm{X} = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3 - k$ sujets parmi les 40 non révisés.

Alors :

1. Les trois sujets tirés ont été révisés : $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 3] = \dfrac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 2] = \dfrac{\binom{60}{2} \cdot \binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Aucun des trois sujets : $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 0] = \dfrac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0, 1, 2, 3\}$ par :

$$\mathrm{P}[\mathrm{X} = k] = \frac{\binom{60}{k} \cdot \binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :

$k = 0 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 0] \simeq 6.110 \times 10^{-2}$

$k = 1 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 1] \simeq 0.289$

$k = 2 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 2] \simeq 0.438$

$k = 3 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 3] \simeq 0.212$

L'espérance est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1.8$ (selon la formule $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$).

Exercice 5 : Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM.

À chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats.

Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction : Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a 4^{20} grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\dfrac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire X, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20 : $\mathrm{P}[\mathrm{X}=k]=\mathrm{C}_{20}^{k}(\dfrac{1}{4})^{k}(1-\dfrac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.

Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np=5$

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Combien de raisins de Corinthe doit-on mettre dans 500g de pâte pour être sûr à 99% qu'il y ait au moins un raisin dans chaque petit pain de 50g ?

Exercice 2 : On lance 2 dés parfaitement équilibrés. Soit T la somme des points obtenus. Soit X le reste dans la division de T par 2, et Y le reste dans la division de T par 5.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 : Un dé équilibré porte un point sur une de ses six faces, deux points sur deux autres faces et trois points sur chacune des dernières faces.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus lors d'un lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X puis calculer sa variance.
2. Après avoir lancé le dé, on lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée autant de fois que le dé a montré de points, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus en tout. Vérifier que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2|\mathrm{X}=3)=\dfrac{3}{8}$.
3. Déterminer la loi de probabilité du couple (X,Y).
4. En déduire la loi de Y et vérifier que les événements « Y est pair » et « Y est impair » ont la même probabilité.
5. X et Y sont-elles indépendantes ?