Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Inégalité de Markow et interprétation.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Correction :

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{1}{2}} &= e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[e^{-\frac{1}{12n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right]e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[-\frac{1}{12n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]e^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim -\frac{1}{12n\sqrt{e}}\end{aligned}$$

Donc la série (à termes négatifs) diverge.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x)\end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soit $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 3 : J'ai dans ma cave six tonneaux indiscernables, trois de bourgogne et quatre de bordeaux.

Si je veux tirer du bourgogne, combien devrai-je goûter en moyenne de tonneaux ?

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Nature des séries de Riemann.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $(1+2+...+n)^{-\alpha}$.

Correction : $(1+2+...+n)^{-\alpha} = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^{-\alpha} \sim \dfrac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}$.

La série (à termes positifs) converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x,y) \mapsto (-13x+6y, -9x+8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1,3)$ et $v = (2,1)$.

   Vérifier que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\mathrm{mat}_{(u,v)}(f)$

Exercice 3 : Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc 15 dromadaires, 10 chameaux et 5 lamas.

Un visiteur prend sur la même photo trois camélidés au hasard. Sachant que tous ces ongulés ont la même probabilité d'être photographiés, établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bosses sur la photo.

Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Théorème de comparaison pour les séries à terme positif.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$.

Correction : $\dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \sim \dfrac{\frac{e^n}{2}}{\frac{e^{2n}}{2}} = e^{-n}$. Donc la série (à TP) converge.

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. f est-il un isomorphisme ?

Exercice 3 : On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Calculer $P(Y = X)$.
3. Quelle est la loi de Y ?
4. Calculer $E(Y)$.

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ une famille d'éléments de E.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \text{ est inversible } \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } \mathrm{E}.$$

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\binom{5n}{2n}}$.

Correction : Posons $u_n = \dfrac{1}{\binom{5n}{2n}} = \dfrac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(5n+5)!}{(2n+2)!(3n+3)!}}{\frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}} = \frac{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{5^5}{2^2 3^3} < 1.$$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \frac{1}{2}\mathrm{X}^2\mathrm{P}'' - \mathrm{X}\mathrm{P}' + \mathrm{P} \end{array}$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}] = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$.
3. Quelle est la nature de f ?
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 3 : Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Correction :

1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. On obtient $\mathrm{P(A)} = 1 - (\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $\mathrm{P(B)} = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.
2. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et interprétation.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

Correction :

$$\begin{aligned} u_n &= n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n+1}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n}))} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln n}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}}\left[1 - e^{-\frac{\ln n}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right] \end{aligned}$$

Donc $u_n \sim e^{\frac{\ln n}{n}} \dfrac{\ln n}{n^2} \sim \dfrac{\ln n}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Ainsi, la série à de TG positif u_n converge. Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 : Soient $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-2, -1, 3)$, et $b_3 = (0, -3, -1)$.

On note $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(b_1, b_2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(b_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on en déduire pour F et G ?
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$
4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20».

1. Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale)
2. quelle est son espérance, son écart-type ?
3. Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Correction : Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15} 0.75^{15} 0.25^{5} = 0.202\,33$.

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : L'espérance d'une variable aléatoire suivant une $\mathscr{B}(n,p)$ est np.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n &= \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \\
&= e^{-n\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\
&= e^{-n\ln\left(2+\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= e^{-n\left[\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{4n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]} \\
&= \frac{1}{2^n}e^{-\frac{1}{4}+\mathrm{o}(1)} \\
&\sim \frac{1}{2^n\sqrt[4]{e}}
\end{aligned}$$

Ou encore $0 \leqslant \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soit $u=(0,-1,1)$, $v=(1,0,-1)$ et $w=(2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 3 : Quelle est la probabilité p_n d'obtenir exactement n *Pile* en lançant $2n$ pièces de monnaie ?

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : L'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{P}_{\mathbb{X}} : & \mathbb{X}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathbb{X}=x) \end{array}$ définit une probabilité.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{I}d)$ et de $\ker(f - 2\mathrm{I}d)$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice Δ de f est diagonale.
3. Calculer Δ^n, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Soient X, Y deux variable aléatoires réelles. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{T} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

1. Montrer que si Z et T sont indépendantes, $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{V}(\mathrm{Y})$.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi prenant les valeurs $1, 2, 3$ avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.
   (a) Monter que $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{V}(\mathrm{Y})$.
   (b) Déterminer les lois de Z et de T. Z et T sont-elles indépendantes ?
   (c) Conclure.

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Formule de transfert.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Correction :

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} &= e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e\left[1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right] \\ &= e\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &\sim \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

Donc la série (à termes positifs) diverge.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 : Soit P une probabilité sur l'univers $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Pour tout $k \in \Omega$, on note $p_k = \mathrm{P}(\{k\})$. On définit sur Ω deux variables aléatoires X, Y par $\mathrm{X}(\{k\}) = \dfrac{1}{24}(k^2 - k)(-k^2 + 8k + 17) + 1$ et $\mathrm{Y}(\{k\}) = k^2(5k^2 - 17)$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \dfrac{1}{2})$ et Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{-12, 0, 12\})$.

1. Montrer que $p_{-1} = \dfrac{1}{4}$ et $p_0 = \dfrac{1}{3}$.
2. En déduire p_1 et p_2.

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Pour $(\mathrm{E}\,;\mathcal{B})$ et $(\mathrm{F}\,;\mathcal{B}')$ deux espaces vectoriels de dimension finie,

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : & \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n!}{n^n}.$$

Correction : Posons $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\mathrm{Im}\,(f)_i$.

En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$$

Exercice 3 : L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction : La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[\mathrm{X} = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3 - k$ sujets parmi les 40 non révisés.

Alors :

1. Les trois sujets tirés ont été révisés : $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 3] = \dfrac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 2] = \dfrac{\binom{60}{2}.\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Aucun des trois sujets : $\mathrm{P}[\mathrm{X} = 0] = \dfrac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0, 1, 2, 3\}$ par :

$$\mathrm{P}[\mathrm{X} = k] = \frac{\binom{60}{k}.\binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :

$k = 0 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 0] \simeq 6.110 \times 10^{-2}$

$k = 1 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 1] \simeq 0.289$

$k = 2 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 2] \simeq 0.438$

$k = 3 : \mathrm{P}[\mathrm{X} = 3] \simeq 0.212$

L'espérance est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1.8$ (selon la formule $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$).

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$. Alors $\mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}.$$

Correction : Posons $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha (\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{\ln(n+1)}{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{\ln(n+1)}{n+1} e^{n\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)}$$

Or $e^{n\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)} = e^{\frac{1}{\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Correction : Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ et si $p = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.

Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$. Dans cette base, la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où le nombre de 1 est $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$. Mais alors $\mathrm{Tr}(p) = r$.

En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.

Exercice 3 : Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM.

À chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats.

Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction : Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a 4^{20} grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\dfrac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire X, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20 : $\mathrm{P}[\mathrm{X}=k]=\mathrm{C}_{20}^{k}(\dfrac{1}{4})^{k}(1-\dfrac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.

Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np=5$

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Critère spécial des séries alternées et exemple de série semi-convergente.

Exercice 1 : Soit $a > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} a^n$.

Correction : $u_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n a^n \sim \dfrac{1}{n} e a^n$.

La série $\sum u_n$ est à termes positifs. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n} a \sim a$.

- Si $a < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a = 1$, $u_n \sim \dfrac{e}{n}$, donc la série diverge.

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.

En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$$

Exercice 3 : Combien de raisins de Corinthe doit-on mettre dans 500g de pâte pour être sûr à 99% qu'il y ait au moins un raisin dans chaque petit pain de 50g ?

Variables aléatoires, Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$. En notant, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$, alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

Exercice 1 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{a_n}{\mathrm{S}_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Correction : On a $u_n = \dfrac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}}{\mathrm{S}_n} = 1 - \dfrac{\mathrm{S}_{n-1}}{\mathrm{S}_n}$.

D'une part $0 < a_n < \mathrm{S}_n$ donc $u_n < 1$ et $1 - u_n > 0$.

D'autre part $\ln\left(\dfrac{\mathrm{S}_{n-1}}{\mathrm{S}_n}\right) = \ln(1-u_n)$, et en sommant, $\ln \mathrm{S}_0 - \ln \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_k)$.

Par hypothèse, on a $\lim \mathrm{S}_n = +\infty$ donc $\lim \sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_k) = -\infty$.

- Si $u_n \nrightarrow 0$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $u_n \to 0$, $\ln(1-u_n) \sim u_n$, et la série diverge encore.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

On considère $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ où $e'_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 : On lance 2 dés parfaitement équilibrés. Soit T la somme des points obtenus. Soit X le reste dans la division de T par 2, et Y le reste dans la division de T par 5.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?