Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : $(\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}),+,\cdot)$ est un sev de $(\mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}),+,\cdot)$.

Exercice 1 : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y,x-y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Exercice 1 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1)) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2}$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 1 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0,x-7y,x+y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Sur E de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est injective si, et seulement si l'image d'une base de E est une famille libre de F.

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Discuter l'existence de I_n pour $n \geqslant 1$.
2. Déterminer la limite de I_n.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n}$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Entre deux espaces de même dimension finie, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 1 : Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Théorème du rang

Exercice 1 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : On pose $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f_2(x,y,z)=(2x+y+z,y-z,x+y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$, $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min\left(\dim(\mathrm{E})\,;\dim(\mathrm{F})\right)$ et cas d'égalité.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 x \arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : On pose $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 3 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Une application linéaire définie sur un espace de dimension finie est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos^2(x)}$ on pourra poser $u = \tan(x)$.

Exercice 2 : Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$.

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Théorème fondamental de l'analyse (on admettra la continuité de la primitive envisagée).

Exercice 1 : $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.

Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 3 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Équivalence pour une fonction continue à valeurs positives entre nullité de l'intégrale et de la fonction.

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

On considère $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \ker(u) + \ker(v)$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 3 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Caractérisation des endomorphismes idem-potents ou involutifs (on ne demandera qu'un seul des deux cas).

Exercice 1 : Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.
2. Déterminer l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f, la dérivée et les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de f en 0^+.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $i \iff ii$

i. $\mathrm{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$
ii. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

Exercice 3 : 1. Montrer que : $\forall\ x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : L'application $\phi_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \end{array}$ est un isomorphisme si, et seulement si $(e_1, \dots \mathrm{e}_p)$ est une base de E.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue en 0.

Déterminer $\displaystyle\lim_{u \to 0} \int_0^u \frac{u}{u^2 + x^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

Montrer l'équivalence : $\ker f = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f))$.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\sqrt{k})$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann et le démontrer dans le cas d'une application lipschitzienne.

Exercice 1 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(2)$. Établir un résultat analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Utiliser cette inégalité pour étudier les limites de f, puis pour montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 .

   On note encore f le prolongement obtenu.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

1. Démontrer que la donnée de $\left\{\begin{array}{lcl} \phi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) & = & e_1 + te_3 \end{array}\right.$ définit une application linéaire ϕ de E dans E.
2. Écrire le transformée du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.
3. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 3 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Expliquer la construction de l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues sur un segment.

Exercice 1 : Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.
2. Déterminer l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f, la dérivée et les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de f en 0^+.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.