Intégration et applications linéaires

Question de cours : $(\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F}), +, \cdot)$ est un sev de $(\mathcal{F}(\mathrm{E};\mathrm{F}), +, \cdot)$.

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Correction : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{x-0} = \dfrac{1}{1+0^2} = 0.$

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction :

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y)\in\ker(f) &\iff f(x,y)=(0,0) \iff (2x+y,x-y)=(0,0)\\ &\iff \begin{cases}2x+y=0\\ x-y=0\end{cases} \iff (x,y)=(0,0)\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker(f)=\{(0,0)\}$ et donc f est injective. On sait déjà qu'elle est bijective d'après le théorème du rang.

2. Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f(x,y)$?

$$\begin{aligned}f(x,y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\iff (2x+y,x-y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y})\\ &\iff \begin{cases}2x+y=\mathrm{X}\\ x-y=\mathrm{Y}\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}\\ y=\dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\end{cases}\\ &\iff (x,y)=\left(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3},\frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right)\end{aligned}$$

   Donc pour n'importe quel $(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in\mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y)=\left(\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3},\dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right)$ qui vérifie donc $f(x,y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

   Donc $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$. Ainsi f est surjective.

   Remarque : Une autre méthode est d'extraire une base de l'image d'une base (la base canonique, par exemple) par f.

3. Conclusion : f est injective et surjective donc bijective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Correction : Soit $u_n=n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. En posant $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : La réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Exercice 1 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$.

Correction : Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \arcsin(u) + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$, c'est $\arcsin'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

On va donc essayer de s'y ramener.

Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine, $4x - x^2$ sous la forme $1 - t^2$:

$$4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2\right).$$

Donc il est naturel d'essayer le changement de variable $u = \dfrac{1}{2}x - 1$ pour lequel $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ et $dx = 2\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}} 2\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) + \mathrm{C}\\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1)) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : $f : \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc f ne peut être injective.

1. Calculons le noyau. Écrivons un polynôme P de degré $\leqslant 3$ sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

   Alors $P(0) = d$, $P(1) = a + b + c + d$, $P(-1) = -a + b - c + d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \ker(f) &\iff (P(-1), P(0), P(1)) = (0,0,0) \\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0 \\ d = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases} \iff \cdots \\
&\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
&\iff (a,b,c,d) = (t, 0, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Ainsi le noyau $\ker(f) = \{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}\,\{X^3 - X\}$. f n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.
2. La formule du rang pour $f : \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}\,(f) = \dim\mathbb{R}_3[4]$.

   Autrement dit $1 + \dim\mathrm{Im}\,(f) = 4$.

   Donc $\dim\mathrm{Im}\,(f) = 3$.

   Ainsi $\mathrm{Im}\,(f)$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^3$. Conclusion f est surjective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Correction : Soit
$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :
$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 1 : Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Correction : Poser $x = \tan(t)$ pour arriver à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)} = \int \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1-\sin^2(t)}$.

Poser $u = \sin(t)$ pour arriver à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$ puis décomposition en éléments simples.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, 0, x-7y, x+y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Sans aucun calcul on sait $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieure à l'espace de départ.

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y) \in \ker(f) &\iff f(x,y) = (0,0,0,0)\\ &\iff (y, 0, x-7y, x+y) = (0,0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} y = 0\\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0\\ x + y = 0\end{cases} \iff \cdots\\ &\iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker(f) = \{(0,0)\}$ et donc f est injective.

2. La formule du rang, appliquée à $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2$.

   Donc $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

   Ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f n'est pas surjective.

   Par décrire $\mathrm{Im}(f)$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\mathrm{Im}(f)$.

   Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$.

   Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1.

   Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$.

   Par construction $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(f)$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\{v_1, v_2\} = \{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}$.

Correction : $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1}\,dx = \left[\frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Sur E de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est injective si, et seulement si l'image d'une base de E est une famille libre de F.

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Discuter l'existence de I_n pour $n \geqslant 1$.
2. Déterminer la limite de I_n.

Correction :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^n - x^{2n}}{1-x}$ n'est pas définie en 1, mais on peut la prolonger par continuité.

   En effet : $\forall\, x \neq 1, \quad f(x) = x^n \dfrac{1-x^n}{1-x} = x^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow[x\to 1]{} n.$

   le prolongement par continuité de f est continu sur $[0,1]$.

   On peut l'y intégrer. f ne diffère de son prolongement qu'en un point : pas de changement de l'intégrale (faussement généralisée).
2. $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^{n+k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^{n+k}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f \colon \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Correction :

1. Aucun problème...
2. Par définition de f et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2\} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2\} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2.$$

Pour le noyau :

$$\ker f = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1, x_2) \in \ker f$, vérifie $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $x_2 \in \mathrm{E}_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in \mathrm{E}_2$. Donc $x_1 \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Réciproquement si $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$, alors $(x, -x) \in \ker f$. Donc

$$\ker f = \{(x, -x) \mid x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2\}.$$

De plus l'application $x \mapsto (x, -x)$ montre que $\ker f$ est isomorphe à $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$.

3. Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre $\ker f$ et $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ on obtient :

$$\dim\,(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) + \dim\,(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) = \dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2).$$

Mais $\dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim\,(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2 - \dim\,(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2).$$

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin \frac{k\pi}{n}$.

Correction : Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx)\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi})\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Entre deux espaces de même dimension finie, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 1 : Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Une intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\frac{\sin(nb)}{n} - f(a)\frac{\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or,

- $\left|f(b)\dfrac{\sin(nb)}{n}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{n}$
- $\left|f(a)\dfrac{\sin(na)}{n}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{n}$
- $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{b-a}{n}\,\|f'\|_\infty$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 2 : On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire "à la main".

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim \mathrm{E}$$

pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

f_1 est injective, surjective (et donc bijective).

1. Faisons tout à la main. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x, y) \in \ker f_1 &\iff f_1(x, y) = (0, 0) \iff (2x + y, x - y) = (0, 0)\\ &\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker f_1 = \{(0, 0)\}$ et donc f_1 est injective.
2. Calculons l'image. Quels éléments (X, Y) peuvent s'écrire $f_1(x, y)$?

$$\begin{aligned}f_1(x, y) = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &\iff (2x + y, x - y) = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})\\ &\iff \begin{cases} 2x + y = \mathrm{X} \\ x - y = \mathrm{Y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3} \\ y = \dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3} \end{cases}\\ &\iff (x, y) = \left(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}, \frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right)\end{aligned}$$

   Donc pour n'importe quel $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x, y) = (\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}, \frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3})$ qui vérifie donc $f_1(x, y) = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Donc $\mathrm{Im}\,(f)_1 = \mathbb{R}^2$. Ainsi f_1 est surjective.
3. Conclusion : f_1 est injective et surjective donc bijective.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

Correction : Encore une fois, ce n'est pas une somme de RIEMANN. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)$\times$nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+1}{2n}$. Or, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\dfrac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\dfrac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\dfrac{3}{2}$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Théorème du rang

Exercice 1 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x \sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 : On pose $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y)$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im}(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire "à la main".

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim \mathrm{E}$$

pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1. Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker f_2 &\iff f_2(x,y,z) = (0,0,0)\\
&\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} 2x+y+z=0\\ y-z=0\\ x+y=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=-z\\ y=z\end{cases}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\\ z\\ z\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \left\{\lambda \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker f_2 = \mathsf{Vect}(-1,1,1)$ et donc f_2 n'est pas injective.
2. Maintenant nous allons utiliser que $\ker f_2 = \mathsf{Vect}(-1,1,1)$, autrement dit $\dim \ker f_2 = 1$. La formule du rang, appliquée à $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \ker f_2 + \dim \mathrm{Im}\,(f)_2 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\dim \mathrm{Im}\,(f)_2 = 2$. Nous allons trouver une base de $\mathrm{Im}\,(f)_2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons par exemple $v_1 = f_2(1,0,0) = (2,0,1) \in \mathrm{Im}\,(f)_2$ et $v_2 = f_2(0,1,0) = (1,1,1) \in \mathrm{Im}\,(f)_2$. Par construction ces vecteurs sont dans l'image de f_2 et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)_2$.
3. f_2 n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

Correction : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \ln 2.$

Intégration et applications linéaires

Question de cours : $\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$, $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min\left(\dim\left(\mathrm{E}\right);\dim\left(\mathrm{F}\right)\right)$ et cas d'égalité.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : On pose $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire “à la main”.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathrm{E}$$

pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

Sans aucun calcul on sait $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \ker f_3 &\iff f_3(x,y) = (0,0,0,0)\\
&\iff (y, 0, x-7y, x+y) = (0,0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} y = 0\\ 0 = 0\\ x - 7y = 0\\ x + y = 0 \end{cases}\\
&\iff \cdots\\
&\iff (x,y) = (0,0)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker f_3 = \{(0,0)\}$ et donc f_3 est injective.

2. La formule du rang, appliquée à $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \ker f_3 + \dim \operatorname{Im}(f)_3 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\dim \operatorname{Im}(f)_3 = 2$. Ainsi $\operatorname{Im}(f)_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f_3 n'est pas surjective.

   Par décrire $\operatorname{Im}(f)_3$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im}(f)_3$. Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$. Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1. Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$. Par construction $v_1, v_2 \in \operatorname{Im}(f)$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \operatorname{Im}(f)_3 = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)_3$.

   Ainsi $\operatorname{Im}(f)_3 = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} = \{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Une application linéaire définie sur un espace de dimension finie est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos^2(x)}$ on pourra poser $u = \tan(x)$.

Exercice 2 : Soients $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$.

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Correction : Soit $u = (x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned} f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4. \end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \ker f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z = 0 \\ y = t \end{array} \right. .$$

Donc, $\ker f = \{(0, y, 0, y),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0, 1, 0, 1))$.

$$\ker f = \mathrm{Vect}((0, 1, 0, 1)).$$

Soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} u' = (x', y', z', t') \in \mathrm{Im}\ f &\Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow y' = -t' \end{aligned}$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$. Donc, $\mathrm{Im}\ f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 /\ y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 - e_4$

$$\mathrm{Im}\ f == \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).$$

Autre solution pour la détermination de Im f. Im $f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, dim (Im f) $= 4 - 1 = 3$. Donc, $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ est une base de Im f.

Exercice 3 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

Correction : Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.

Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$, on a $\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leqslant \displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, et pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geqslant \displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(1-\frac{1}{n}),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \arcsin(1-\frac{1}{n}) - \arcsin\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Théorème fondamental de l'analyse (on admettra la continuité de la primitive envisagée).

Exercice 1 : $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.

Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction : Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \ker f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\ker f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha+\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\ker f = \mathrm{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}\ f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\mathrm{Im}\ f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}\ (z)$ et $\mathrm{Im}\ f = i\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$.

Correction : $\ln k$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Équivalence pour une fonction continue à valeurs positives entre nullité de l'intégrale et de la fonction.

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : Avec ε pour séparer l'influence de 1.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

On considère $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v) = \ker(u) + \ker(v)$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Correction :

— $\dim(\mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)) = \dim \mathrm{Im}\,(u) + \dim \mathrm{Im}\,(v) - \dim \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \dim(\mathrm{E})$.

$\dim(\ker(u) + \ker(v)) = \dim\ker(u) + \dim\ker(v) - \dim\ker(u) \cap \ker(v) = \dim(\mathrm{E})$.

En additionnant, d'après le théorème du rang :

$\dim \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) + \dim\ker(u) \cap \ker(v) = 0$.

Donc $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$ et $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$.

— $$\begin{aligned}\dim(\mathrm{E}) &= \dim(\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g)\\ &\leqslant \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, g)\\ &= 2\dim(\mathrm{E}) - \dim\ker f - \dim\ker g\\ &\leqslant 2\dim(\mathrm{E}) - \dim(\ker f + \ker g) = \dim(\mathrm{E})\,.\end{aligned}$$

Donc toutes les inégalités sont des égalités, et les sommes sont directes.

Exercice 3 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : $p_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

$s_n=\ln p_n=\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(2n)!}{n!n^n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{4}{e}}$$

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Caractérisation des endomorphismes idem-potents ou involutifs (on ne demandera qu'un seul des deux cas).

Exercice 1 : Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.
2. Déterminer l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f, la dérivée et les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de f en 0^+.

Correction :

1. $u : t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur R^*.

   $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive avec bornes dans le bon sens)

   $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction négative avec bornes à l'envers).
2. Soit $\phi : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

   D'après le théorème fondamental, u étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ϕ est la primitive de u sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1. Et $\forall\, x > 0, f(x) = \phi(3x) - \phi(x)$. Ainsi, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme et composée de fonctions dérivables.

   On a $\forall\, x > 0, f'(x) = 3\phi'(3x) - \phi'(x) = 3\dfrac{e^{-3x}}{3x} - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-3x} - e^{-x}}{x}$. Idem pour $x < 0$.
3. $\forall\, x \geqslant 1, f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{3x} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x} - e^{-3x}}{3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
4. $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Comme $\dfrac{1-e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

   Cette fonction est donc bornée $[-1, 1]$. Posons $\mathrm{M} = \displaystyle\max_{t\in[-1,1]} \left|\frac{1-e^{-t}}{t}\right|$.

   On a alors $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right], |\ln 3 - f(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{3x} \left|\frac{1-e^{-t}}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant 2\mathrm{M}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

   $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(3)}$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $i \iff ii$

i. $\mathrm{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

ii. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

Exercice 3 : 1. Montrer que : $\forall \ x \geqslant 0, \ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Correction :

1.
2. $\exp\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : L'application $\phi_{\mathcal{F}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \end{array}$ est un isomorphisme si, et seulement si $(e_1, \dots \mathrm{e}_p)$ est une base de E.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue en 0.

Déterminer $\displaystyle\lim_{u \to 0} \int_0^u \frac{u}{u^2 + x^2} f(x) \, \mathrm{d}x$.

Correction : Poser $h = \dfrac{x}{u}$. La réponse est $f(0)\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

Montrer l'équivalence : $\ker f = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f))$.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\sqrt{k})$.

Correction : Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\sqrt{k} - 1 \leqslant \mathrm{E}(\sqrt{k}) \leqslant \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de Riemann $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\dfrac{k}{n}}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \dfrac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\dfrac{3}{2}$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann et le démontrer dans le cas d'une application lipschitzienne.

Exercice 1 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\ln(2)$. Établir un résultat analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Utiliser cette inégalité pour étudier les limites de f, puis pour montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 .

   On note encore f le prolongement obtenu.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

1. Démontrer que la donnée de $\begin{cases} \phi(e_1) &= e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) &= e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) &= e_1 + te_3 \end{cases}$ définit une application linéaire ϕ de E dans E.
2. Écrire le transformée du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.
3. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Correction :

1. Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in \mathrm{E}$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule
$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$
Soit ici :
$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$
Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).
2. On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$
Si $t \neq 0$ alors en résolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et ϕ est injective.

   Si $t = 0$, alors ϕ n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.
3. Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. ϕ est surjective si et seulement si la dimension de $\mathrm{Im}\,(\phi)$ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici E de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \mathrm{Im}\,(\phi)$:
$$\dim \ker \phi + \dim \mathrm{Im}\,(\phi) = \dim \mathrm{E}.$$
Si $t \neq 0$, ϕ est injective donc $\ker \phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim \mathrm{Im}\,(\phi) = 3$ et ϕ est surjective.

   Si $t = 0$ alors ϕ n'est pas injective donc $\ker \phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim \mathrm{Im}\,(\phi) \leqslant 2$. Donc ϕ n'est pas surjective.

   On remarque que ϕ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

Exercice 3 : Trouver $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$.

Correction : $\frac{\pi}{8}$.

Intégration et applications linéaires

Question de cours : Expliquer la construction de l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues sur un segment.

Exercice 1 : Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.
2. Déterminer l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f, la dérivée et les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de f en 0^+.

Correction :

1. $u : t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur R^*.

   $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive avec bornes dans le bon sens)

   $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction négative avec bornes à l'envers).
2. Soit $\phi : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

   D'après le théorème fondamental, u étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ϕ est la primitive de u sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1. Et $\forall\, x > 0, f(x) = \phi(3x) - \phi(x)$. Ainsi, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme et composée de fonctions dérivables.

   On a $\forall\, x > 0, f'(x) = 3\phi'(3x) - \phi'(x) = 3\dfrac{e^{-3x}}{3x} - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-3x} - e^{-x}}{x}$. Idem pour $x < 0$.
3. $\forall\, x \geqslant 1, f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{3x} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x} - e^{-3x}}{3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
4. $\ln(3) - f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Comme $\dfrac{1-e^{-t}}{t} \underset{t\to0}{\sim} 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

   Cette fonction est donc bornée $[-1, 1]$. Posons $\mathrm{M} = \max\limits_{t\in[-1,1]} \left|\dfrac{1-e^{-t}}{t}\right|$.

   On a alors $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right], |\ln 3 - f(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{3x} \left|\frac{1-e^{-t}}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant 2\mathrm{M}x \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

   $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \ln(3)}$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer kerφ et Imφ.

Correction :

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2. Soit $P \in E$. $P \in \ker \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans ker φ et donc

$$\ker \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer Im φ, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, Im $(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc Im $\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Exercice 3 : Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $\mathrm{I} = \int_0^1 g(x)dx$.

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = \int_0^1 g(x)dx &= \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\left[x - \arctan x\right]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $\mathrm{I} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.