Déterminants

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 33

Sommaire I

En mathématiques, le déterminant est une valeur qu'on peut associer aux matrices ou aux applications linéaires en dimension finie.

Le déterminant peut se concevoir comme une généralisation à l'espace de dimension n de la notion d'aire ou de volume orientés. Sur les exemples les plus simples, ceux de la géométrie euclidienne en dimension 2 ou 3, il s'interprète en termes d'aires ou de volumes, et son signe est relié à la notion d'orientation.

Il fut initialement introduit en algèbre, pour résoudre un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues. Il se révèle être un outil très puissant dans de nombreux domaines. Il intervient ainsi dans l'étude des endomorphismes, la recherche de leurs valeurs propres, les propriétés d'indépendance linéaire de certaines familles de vecteurs, mais aussi dans le calcul différentiel, par exemple dans la formule de changement de variables dans les intégrales multiples.

Comme pour de nombreuses opérations, le déterminant peut être défini par une collection de propriétés (axiomes) qu'on résume par le terme « forme multilinéaire alternée ». Cette définition permet d'en faire une étude théorique complète et d'élargir ses champs d'applications. Nous n'irons pas jusque là et nous contenterons d'en donner une première approche, quelques premières applications et quelques premiers calculs.

Comme pour de nombreuses opérations, le déterminant peut être défini par une collection de propriétés (axiomes) qu'on résume par le terme « forme multilinéaire alternée ». Cette définition permet d'en faire une étude théorique complète et d'élargir ses champs d'applications. Nous n'irons pas jusque là et nous contenterons d'en donner une première approche, quelques premières applications et quelques premiers calculs.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n sera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

I. Introduction

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique que l'on note $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ le parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}} = \left\{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \,/\, \alpha,\, \beta \in [0\,;1]\right\}.$$

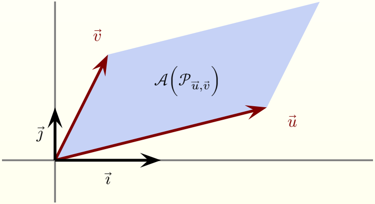


Figure 1 – Aire algébrique d'un parallélogramme porté par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

I. Introduction

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique que l'on note $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ le parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}} = \left\{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \,/\, \alpha,\ \beta \in [0\,;1]\right\}.$$

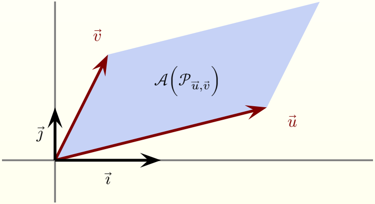


Figure 1 – Aire algébrique d'un parallélogramme porté par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ l'aire algébrique de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ c'est-à-dire que l'aire de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ est comptée :

- positivement si une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$ appartient $[0\,;\pi]$.

I. Introduction

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique que l'on note $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ le parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}} = \left\{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \,/\, \alpha,\ \beta \in [0\,;1]\right\}.$$

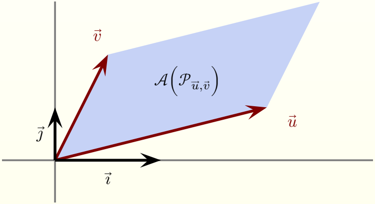


Figure 1 – Aire algébrique d'un parallélogramme porté par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

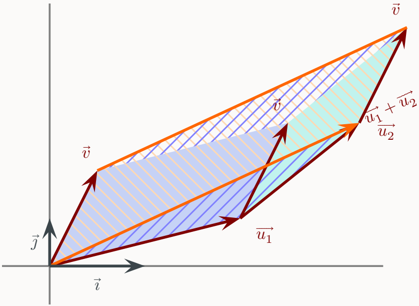
On note $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ l'aire algébrique de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ c'est-à-dire que l'aire de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ est comptée :

- positivement si une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$ appartient $[0\,;\pi]$.
- négativement si une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$ appartient $[-\pi\,;0]$.

Rappel :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

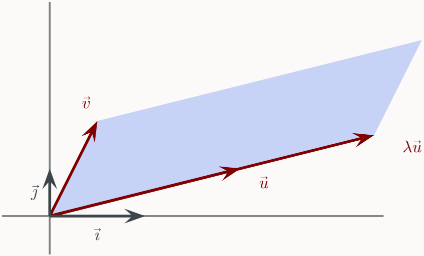
1. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.
   $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_2}}\right)$.



Rappel :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.
   $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_2}}\right)$.
2. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{u},\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.



I. Introduction

Rappel :

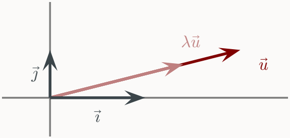
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.
   $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_2}}\right)$.
2. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{u},\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
3. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{v},\vec{u}}\right) = -\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

Rappel :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.
   $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_2}}\right)$.
2. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{u},\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
3. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{v},\vec{u}}\right) = -\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
4. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{u}}\right) = 0$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{v},\vec{v}}\right) = 0$.

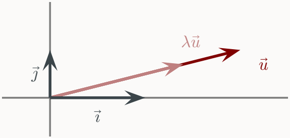


I. Introduction

Rappel :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.
   $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_2}}\right)$.
2. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{u},\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
3. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{v},\vec{u}}\right) = -\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
4. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{u}}\right) = 0$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{v},\vec{v}}\right) = 0$.



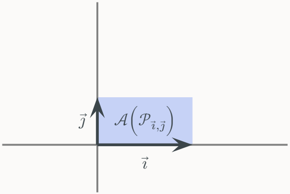
5. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{0}}\right) = 0$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{0},\vec{v}}\right) = 0$.

I. Introduction

Rappel :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.
   $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_2}}\right)$.
2. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{u},\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
3. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{v},\vec{u}}\right) = -\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
4. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{u}}\right) = 0$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{v},\vec{v}}\right) = 0$.
5. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{0}}\right) = 0$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{0},\vec{v}}\right) = 0$.
6. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}}\right) = 1$.



I. Introduction

Rappel :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

I. Introduction

Rappel :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée directe.

1. On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \det(\vec{u}\,;\vec{v}) \end{array}$ est :

Rappel :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \det(\vec{u}\,;\vec{v}) \end{array}$ est :
    - une forme bilinéaire.

Rappel :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté det $(\vec{u}\,;\vec{v})$, le réel :

$$\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \det\,(\vec{u}\,;\vec{v}) \end{array}$ est :
   - une forme bilinéaire.
   - antisymétrique : $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\det\,(\vec{v}\,;\vec{u})$.

Rappel :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté det $(\vec{u}\,;\vec{v})$, le réel :

$$\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \det\,(\vec{u}\,;\vec{v}) \end{array}$ est :

   - une forme bilinéaire.
   - antisymétrique : $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\det\,(\vec{v}\,;\vec{u})$.
   - alternée : $\det\,(\vec{u}\,;\vec{u}) = \det\,(\vec{v}\,;\vec{v}) = 0$.

I. Introduction

Rappel :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \det(\vec{u}\,;\vec{v}) \end{array}$ est :

   - une forme bilinéaire.
   - antisymétrique : $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\det(\vec{v}\,;\vec{u})$.
   - alternée : $\det(\vec{u}\,;\vec{u}) = \det(\vec{v}\,;\vec{v}) = 0$.

3. $\det\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right) = 1$.

Corollaire 1 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}+\lambda\vec{u}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right).$$

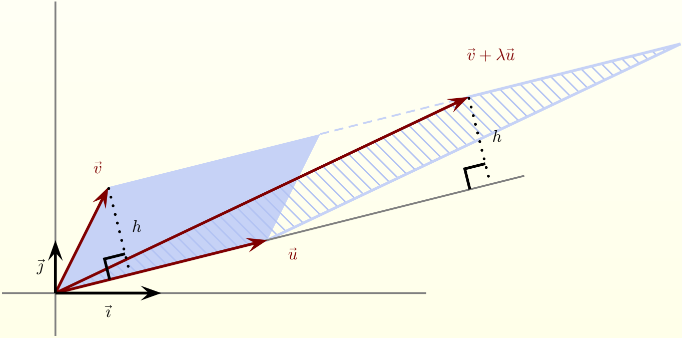


Figure 2 – $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}+\lambda\vec{u}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

I. Introduction

En dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représente, de même, le volume au signe près du parallélépipède engendré par les trois vecteurs.

Rappel :

Soient x, y et z trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de x, y et z, noté $\det(x\,;y\,;z)$, le réel :

$$\det(x\,;y\,;z) = \left(x \wedge y\right) \cdot z.$$

En dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représente, de même, le volume au signe près du parallélépipède engendré par les trois vecteurs.

Rappel :

Soient x, y et z trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de x, y et z, noté $\det(x\,;y\,;z)$, le réel :

$$\det(x\,;y\,;z) = \Big(x \wedge y\Big) \cdot z.$$

2. L'application $\det$: $\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}}_3^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \det(x\,;y\,;z) \end{array}$ est :

I. Introduction

En dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ représente, de même, le volume au signe près du parallélépipède engendré par les trois vecteurs.

Rappel :

Soient x, y et z trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de x, y et z, noté $\det(x\,;y\,;z)$, le réel :

$$\det(x\,;y\,;z) = \Big(x \wedge y\Big) \cdot z.$$

2. L'application $\det$: $\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}}_3^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \det(x\,;y\,;z) \end{array}$ est :

   - une forme trilinéaire.

I. Introduction

En dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ représente, de même, le volume au signe près du parallélépipède engendré par les trois vecteurs.

Rappel :

Soient x, y et z trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. On appelle **déterminant** de x, y et z, noté $\det(x\,;y\,;z)$, le réel :

$$\det(x\,;y\,;z) = \left(x \wedge y\right) \cdot z.$$

2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}}_3^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \det(x\,;y\,;z) \end{array}$ est :

   - une forme trilinéaire.
   - antisymétrique : $\det(x\,;y\,;z) = -\det(y\,;x\,;z) = -\det(x\,;z\,;y) = -\det(z\,;y\,;x)$.

En dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représente, de même, le volume au signe près du parallélépipède engendré par les trois vecteurs.

Rappel :

Soient x, y et z trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de x, y et z, noté $\det(x\,;y\,;z)$, le réel :

$$\det(x\,;y\,;z) = \Big(x \wedge y\Big) \cdot z.$$

2. L'application $\det : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}}_3^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \det(x\,;y\,;z) \end{array}$ est :

   - une forme trilinéaire.
   - antisymétrique : $\det(x\,;y\,;z) = -\det(y\,;x\,;z) = -\det(x\,;z\,;y) = -\det(z\,;y\,;x)$.
   - alternée : $\det(x\,;x\,;z) = \det(y\,;y\,;z) = \det(x\,;z\,;z) = \det(y\,;z\,;z) = 0$.

I. Introduction

En dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représente, de même, le volume au signe près du parallélépipède engendré par les trois vecteurs.

Rappel :

Soient x, y et z trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. On appelle déterminant de x, y et z, noté $\det(x\,;y\,;z)$, le réel :

$$\det(x\,;y\,;z) = \left(x \wedge y\right) \cdot z.$$

2. L'application $\det$: $\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}}_3^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \det(x\,;y\,;z) \end{array}$ est :
   - une forme trilinéaire.
   - antisymétrique : $\det(x\,;y\,;z) = -\det(y\,;x\,;z) = -\det(x\,;z\,;y) = -\det(z\,;y\,;x)$.
   - alternée : $\det(x\,;x\,;z) = \det(y\,;y\,;z) = \det(x\,;z\,;z) = \det(y\,;z\,;z) = 0$.
3. $\det\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right) = 1$.

Exercice 1 :

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 1 :

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I. Introduction

Exercice 1 :

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

II. Déterminant d'une matrice carrée

II. Déterminant d'une matrice carrée

On va généraliser tout cela en dimension quelconque (finie).

II. Déterminant d'une matrice carrée

On va généraliser tout cela en dimension quelconque (finie).

Soit $A = (C_1|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On identifiera $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec le n-uplet de ses colonnes $(C_{1,A}, \dots, C_{n,A}) \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\quad\simeq\quad} \Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\Big)^n$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{ccc} C_1 & \dots & C_n \\ \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \right. & \dots, & \left. \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

II. Déterminant d'une matrice carrée

On va généraliser tout cela en dimension quelconque (finie).

Soit $\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On identifiera $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec le n-uplet de ses colonnes $(\mathrm{C}_{1,\mathrm{A}}, \dots, \mathrm{C}_{n,\mathrm{A}}) \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\quad\simeq\quad} \Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\Big)^n$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{C}_1 & \dots & \mathrm{C}_n \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, & \dots, & \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

En particulier, pour $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ une application et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera indifféremment pour des commodités d'écriture, $f(\mathrm{A})$ ou $f(\mathrm{C}_{1,\mathrm{A}}, \dots, \mathrm{C}_{n,\mathrm{A}})$ la valeur prise par f en A.

Définition 1 :

Soient $A = (C_1|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$ un application.

On dit que :

- f est multilinéaire si f est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne de A : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\forall\, C_1, \dots, C_n, C' \in \mathbb{K}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(C_1, \dots, \underset{\underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\uparrow}}{\lambda C_i + C'}, \dots, C_n) = \lambda f(C_1, \dots, \underset{\underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\uparrow}}{C_i}, \dots, C_n) + \dots$$

$$\dots\ f(C_1, \dots, \underset{\underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\uparrow}}{C'}, \dots, C_n).$$

II. Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1 :

Soient $A = (C_1 | \dots | C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$ un application.

On dit que :

- f est multilinéaire si f est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne de A : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\forall\, C_1, \dots, C_n, C' \in \mathbb{K}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{\lambda C_i + C'}}, \dots, C_n) = \lambda f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_i}}, \dots, C_n) + \dots$$

$$\dots f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C'}}, \dots, C_n).$$

- f est antisymétrique si $\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $i \neq j$ alors :

$$f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_j}}, \dots, \underset{j^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_i}}, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_i}}, \dots, \underset{j^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_j}}, \dots,$$

Définition 1 :

Soient $A = (C_1|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$ un application.

On dit que :

- f est multilinéaire si f est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne de A : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\forall\, C_1, \dots, C_n, C' \in \mathbb{K}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(C_1,\dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{\lambda C_i + C'}, \dots, C_n) = \lambda f(C_1,\dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C_i}, \dots, C_n) + \dots$$

$$\dots\ f(C_1,\dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C'}, \dots, C_n).$$

- f est antisymétrique si $\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $i \neq j$ alors :

$$f(C_1,\dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ j^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C_i}, \dots, C_n) = -f(C_1,\dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ j^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C_j}, \dots, C$$

- f est alternée si $\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $i \neq j$ alors :

$$f(C_1,\dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ j^{\text{ème}}\ \text{colonne}}}{C_i}, \dots, C_n) = 0.$$

II. Déterminant d'une matrice carrée

Proposition 1 :

1. Toute application multilinéaire alternée est antisymétrique.

II. Déterminant d'une matrice carrée

Proposition 1 :

1. Toute application multilinéaire alternée est antisymétrique.
2. Si la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est différente de 2, la réciproque est vraie : toute application multilinéaire antisymétrique est alternée.

II. Déterminant d'une matrice carrée

1. Généralités

Définition/Théorème 2 (Admis) :

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est multilinéaire.

II. Déterminant d'une matrice carrée

1. Généralités

Définition/Théorème 2 (Admis) :

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est multilinéaire.
2. f est antisymétrique.

Définition/Théorème 2 (Admis) :

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est multilinéaire.
2. f est antisymétrique.
3. $f(\mathrm{I}_n) = 1$.

Définition/Théorème 2 (Admis) :

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est multilinéaire.
2. f est antisymétrique.
3. $f(\mathrm{I}_n) = 1$.

Cette application est appelée déterminant et notée det :

$$\forall\, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ on note } \det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}.$$

II. Déterminant d'une matrice carrée

1. Généralités

Définition/Théorème 2 (Admis) :

Il existe une unique application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est multilinéaire.
2. f est antisymétrique.
3. $f(\mathrm{I}_n) = 1$.

Cette application est appelée déterminant et notée det :

$$\forall\, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \text{ on note } \det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}.$$

La dernière condition peut être vue comme une condition de normalisation.

II. Déterminant d'une matrice carrée

1. Généralités

Théorème 2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Théorème 2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Exercice 2 :

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

2. $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$

Exercice 3 (Règle de Sarrus) :

1. Déterminer l'expression explicite de $\det$ pour $n = 3$.

Exercice 3 (Règle de Sarrus) :

1. Déterminer l'expression explicite de det pour $n = 3$.
2. Applications : Calculer les déterminants suivants :

Exercice 3 (Règle de Sarrus) :

1. Déterminer l'expression explicite de det pour $n = 3$.
2. Applications : Calculer les déterminants suivants :

    1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 3 (Règle de Sarrus) :

1. Déterminer l'expression explicite de $\det$ pour $n = 3$.
2. Applications : Calculer les déterminants suivants :

   1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

   2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Exercice 3 (Règle de Sarrus) :

1. Déterminer l'expression explicite de $\det$ pour $n = 3$.
2. Applications : Calculer les déterminants suivants :

   1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
   2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
   3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 3 (Règle de Sarrus) :

1. Déterminer l'expression explicite de det pour $n = 3$.
2. Applications : Calculer les déterminants suivants :

   1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
   2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
   3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$
   4. $\mathrm{V}_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$

(Hors-Programme) Pour $n \geqslant 2$ quelconque, on a l'expression explicite suivante du déterminant d'une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n},$$

où la somme est prise sur l'ensemble des bijections (permutations) de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, et où ε est ce qu'on appelle la signature de σ. Cette formule n'est pas à savoir, mais il est intéressant de retenir que $\det(\mathrm{A})$ est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice A.

Un déterminant est ainsi continu, de classe $\mathcal{C}^k$... si les coefficients le sont.

Corollaire 2 :

Soient $\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C}' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle est nul.

Corollaire 2 :

Soient $A = (C_1|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle est nul.
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det\left(C_1|\dots|\lambda C_i + C'|\dots|C_n\right) = \lambda \det\left(C_1|\dots|C_i|\dots|C_n\right) + \det\left(C_1|\dots|C'|\dots|C_n\right).$$

Corollaire 2 :

Soient $A = (C_1|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle est nul.
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

   $$\det(C_1|\dots|\lambda C_i + C'|\dots|C_n) = \lambda \det(C_1|\dots|C_i|\dots|C_n) + \det(C_1|\dots|C'|\dots|C_n).$$
3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Corollaire 2 :

Soient $\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1|\dots|\mathrm{C}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C}' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle est nul.
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

   $$\det(\mathrm{C}_1|\dots|\lambda \mathrm{C}_i + \mathrm{C}'|\dots|\mathrm{C}_n) = \lambda \det(\mathrm{C}_1|\dots|\mathrm{C}_i|\dots|\mathrm{C}_n) + \det(\mathrm{C}_1|\dots|\mathrm{C}'|\dots|\mathrm{C}_n).$$
3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.

Exemple 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Théorème 3 (Déterminant d'une matrice diagonale) :

$$\det\Big(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)\Big) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Corollaire 3 :

1. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux colonnes distinctes.

Corollaire 3 :

1. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux colonnes distinctes.
2. Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul.

Corollaire 3 :

1. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux colonnes distinctes.
2. Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul.
3. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.

Corollaire 3 :

1. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux colonnes distinctes.
2. Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul.
3. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.
4. Si les colonnes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul. En particulier, le déterminant d'une matrice non inversible est nul.

II. Déterminant d'une matrice carrée

3. Antisymétrie

Corollaire 3 :

1. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux colonnes distinctes.
2. Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul.
3. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.
4. Si les colonnes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul. En particulier, le déterminant d'une matrice non inversible est nul.

Exercice 4 :

Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Rappel :

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices de transposition $\mathrm{L}_{i,j,n}$, de dilatation $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ et de transvection $\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)$ par :

$$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow i \qquad \uparrow j \end{array} \qquad \mathrm{H}_{i,n}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow i \end{array} \qquad \mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j \end{array}$$

Rappel :

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices de transposition $\mathrm{L}_{i,j,n}$, de dilatation $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ et de transvection $\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)$ par :

$$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad \uparrow_i \qquad\quad \uparrow_j \end{matrix} & \end{array}$$

$$\mathrm{H}_{i,n}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad \uparrow_i \end{matrix} & \end{array}$$

$$\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\quad \uparrow_j \end{matrix} & \end{array}$$

Corollaire :

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right) = -1$.

Rappel :

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices de transposition $\mathrm{L}_{i,j,n}$, de dilatation $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ et de transvection $\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)$ par :

$$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \quad & \uparrow \\ i & & j \end{array} \end{array}
\qquad
\mathrm{H}_{i,n}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ i \end{array} \end{array}
\qquad
\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} \end{array}$$

Corollaire :

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right) = -1$.
- $\det\left(\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)\right) = \lambda$.

Rappel :

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices de transposition $\mathrm{L}_{i,j,n}$, de dilatation $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ et de transvection $\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)$ par :

$$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & \uparrow_i & & & \uparrow_j & & \end{array} \end{array}
\qquad
\mathrm{H}_{i,n}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow_i & & & \end{array} \end{array}
\qquad
\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow_j & & & & \end{array} \end{array}$$

Corollaire :

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right) = -1$.
- $\det\left(\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)\right) = \lambda$.
- $\det\left(\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)\right) = 1$.

Rappel (Opérations élémentaires) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A.
  On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.

Rappel (Opérations élémentaires) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A.
  On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,n}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ.
  On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ cette opération.

Rappel (Opérations élémentaires) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A.
  On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,n}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ.
  On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ cette opération.
- Multiplier A par $T_{i,j,n}(\lambda)$ à droite revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ colonne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).
  On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ cette opération.

Corollaire 5 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Une transposition sur les colonnes de A change le déterminant en son opposé.

$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(\mathrm{AL}_{i,j,n}\right) = -\det(\mathrm{A}).$$

Corollaire 5 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Une transposition sur les colonnes de A change le déterminant en son opposé.

$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(\mathrm{AL}_{i,j,n}\right) = -\det(\mathrm{A}).$$

2. Une dilatation par λ sur les colonnes de A multiplie le déterminant par λ.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\mathrm{AH}_{i,n}(\lambda)\right) = \lambda \det(\mathrm{A}).$$

Corollaire 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Une transposition sur les colonnes de A change le déterminant en son opposé.
$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(AL_{i,j,n}\right) = -\det(A).$$
2. Une dilatation par λ sur les colonnes de A multiplie le déterminant par λ.
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(AH_{i,n}(\lambda)\right) = \lambda \det(A).$$
3. Une transvection sur les colonnes de A ne change pas le déterminant.
$$\forall\, i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(AT_{i,j,n}(\lambda)\right) = \det(A).$$

Corollaire 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Une transposition sur les colonnes de A change le déterminant en son opposé.

$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(AL_{i,j,n}\right) = -\det(A).$$

2. Une dilatation par λ sur les colonnes de A multiplie le déterminant par λ.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(AH_{i,n}(\lambda)\right) = \lambda \det(A).$$

3. Une transvection sur les colonnes de A ne change pas le déterminant.

$$\forall\, i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(AT_{i,j,n}(\lambda)\right) = \det(A).$$

Remarque : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et E une matrice élémentaire.
Alors, $\det(E) \neq 0 \quad$ et $\quad \det(AE) = \det(A) \times \det(E)$.

Proposition 4 (Déterminant d'une matrice triangulaire) :

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \\ & \ddots & & \vdots \\ & (0) & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Proposition 4 (Déterminant d'une matrice triangulaire) :

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \\ & \ddots & & \vdots \\ & (0) & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Méthode 1 :

Pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on applique l'algorithme de Gauss sur les colonnes de la matrice.

On se ramène ainsi à une matrice échelonnée triangulaire (inutile de la réduire) dont le calcul du déterminant est aisé.

Exercice 5 :

Calculer le déterminant des matrices suivantes (de taille n lorsque non précisé) :

1. $$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & (1) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Calculer le déterminant des matrices suivantes (de taille n lorsque non précisé) :

1. $$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & (1) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Calculer le déterminant des matrices suivantes (de taille n lorsque non précisé) :

1. $$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & (1) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & a & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

Théorème 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{A est inversible} \quad \iff \quad \det(A) \neq 0.$$

Théorème 5 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{A} \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Le déterminant caractérise donc les matrices inversibles.

Théorème 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

Le déterminant caractérise donc les matrices inversibles.

Exemples 2 :

D'après l' exercice (5) ,

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles.

Théorème 5 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{A} \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Le déterminant caractérise donc les matrices inversibles.

Exemples 2 :

D'après l' exercice (5) ,

- $\begin{pmatrix} a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & a & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 1 - n$.

Exercice 6 :

Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour les matrices suivantes :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1-m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant et déterminer pour quelles valeurs de m la matrice est inversible.

Exercice 6 :

Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1-m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant et déterminer pour quelles valeurs de m la matrice est inversible.
2. Calculer B^{-1} et C^{-1} lorsque B et C sont inversibles.

II. Déterminant d'une matrice carrée

6. Produit de matrices

Théorème 6 :

$$\forall\, \mathrm{A},\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad \det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}).$$

Théorème 6 :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

ATTENTION

$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Théorème 6 :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

ATTENTION

$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$

Corollaire 6 :

$$\forall\, A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}), \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A} - \mathrm{I}_n$.

Calculer $\det(\mathrm{A})$.

Remarques : Cette petite propriété a et aura de grandes conséquences notamment :

- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = \det(B) \times \det(A) = \det(BA)$ alors que $AB \neq BA$ généralement.
  Le déterminant , comme les polynômes d'endomorphismes, permet de récupérer un peu de commutativité.

Remarques : Cette petite propriété a et aura de grandes conséquences notamment :

- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = \det(B) \times \det(A) = \det(BA)$ alors que $AB \neq BA$ généralement.
  Le déterminant , comme les polynômes d'endomorphismes, permet de récupérer un peu de commutativité.
- $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = \big(\det(A)\big)^p$.

Remarques : Cette petite propriété a et aura de grandes conséquences notamment :

- $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{B}) \times \det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{BA})$ alors que $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ généralement.
  Le déterminant , comme les polynômes d'endomorphismes, permet de récupérer un peu de commutativité.
- $\forall\, p \in \mathbb{N},\ \det(\mathrm{A}^p) = \big(\det(\mathrm{A})\big)^p$.
- $\forall\, \mathrm{P} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}),\ \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \det(\mathrm{A})$.
  Autrement dit, deux matrices semblables ont le même déterminant. Comme la trace, le déterminant est donc un invariant de similitude.

Théorème 7 :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A^\top) = \det(A).$$

Théorème 7 :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det\left(\mathrm{A}^\top\right) = \det\left(\mathrm{A}\right).$$

Le déterminant est donc aussi une forme multilinéaire et antisymétrique (et alternée) en les lignes de la matrice.

Théorème 7 :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det\left(\mathrm{A}^\top\right) = \det\left(\mathrm{A}\right).$$

Le déterminant est donc aussi une forme multilinéaire et antisymétrique (et alternée) en les lignes de la matrice.

Exercice 8 :

Calculer $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ où $a,\, b \in \mathbb{K}$.

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.
5. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.
5. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.
6. Si les lignes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul.

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.
5. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.
6. Si les lignes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul.
7. Une transposition sur les lignes de A change le déterminant en son opposé.

$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\mathrm{A}\right) = -\det(\mathrm{A}).$$

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.
5. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.
6. Si les lignes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul.
7. Une transposition sur les lignes de A change le déterminant en son opposé.

$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\mathrm{A}\right) = -\det(\mathrm{A}).$$

8. Une dilatation par λ sur les lignes de A multiplie le déterminant par λ.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)\mathrm{A}\right) = \lambda \det(\mathrm{A}).$$

Corollaire 7 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.
5. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.
6. Si les lignes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul.
7. Une transposition sur les lignes de A change le déterminant en son opposé.

$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\mathrm{A}\right) = -\det(\mathrm{A}).$$

8. Une dilatation par λ sur les lignes de A multiplie le déterminant par λ.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)\mathrm{A}\right) = \lambda \det(\mathrm{A}).$$

9. Une transvection sur les lignes de A ne change pas le déterminant.

$$\forall\, i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)\mathrm{A}\right) = \det(\mathrm{A}).$$

III. Calculs de déterminants

Lemme 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_{n-1}.$$

III. Calculs de déterminants

1. Développement suivant une ligne ou une colonne

Lemme 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Remarque : On obtient un résultat analogue en transposant.

Définition 3 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on appelle mineur d'indice $(i\,;j)$ de A le déterminant $\Delta_{i,j}(\mathrm{A})$ de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en rayant la ligne i et la colonne j de A

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Théorème 8 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A}) \qquad \text{suivant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne,}$$

Théorème 8 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A}) \qquad \text{suivant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne,}$$

$$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,, \qquad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A}) \qquad \text{suivant la } j^{\text{ème}} \text{ colonne.}$$

Théorème 8 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A}) \qquad \text{suivant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne,}$$

$$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \qquad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A}) \qquad \text{suivant la } j^{\text{ème}} \text{ colonne.}$$

On peut développer suivant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.
On cherche évidemment une ligne ou une colonne ayant le plus de 0 possible...

III. Calculs de déterminants

1. Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 8 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \det(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A}) \qquad \text{suivant la } i^{\text{ème}} \text{ ligne,}$$

$$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\qquad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A}) \qquad \text{suivant la } j^{\text{ème}} \text{ colonne.}$$

On peut développer suivant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne. On cherche évidemment une ligne ou une colonne ayant le plus de 0 possible...

Remarque : Par une récurrence évidente et à l'aide de ces formules, on retrouve ici que le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice.

III. Calculs de déterminants

1. Développement suivant une ligne ou une colonne

Exercice 9 :

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la colonne 3 puis par rapport à la ligne 2.

Un peu d'histoire : ***Complexité de l'algorithme de calcul du déterminant***

Ces formules ramènent le calcul d'un déterminant d'ordre n à celui de n déterminants d'ordre $n-1$.

Si u_n est le nombre d'opérations pour calculer un déterminant d'ordre n, on a donc :

$$u_n = nu_{n-1} + n \geqslant nu_{n-1} \implies u_n \geqslant \frac{n!}{2}u_2 = \frac{3}{2}n!$$

Ainsi, cet algorithme est rapidement explosif en nombre d'opérations. Ces formules ne sont donc pas exploitables en pratique (sauf pour $n=3$ ou 2).

En pratique, on se ramène toujours, grâce à l'algorithme de Gauss, au déterminant d'une matrice triangulaire, ce qui nécessite $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ opérations.

Quelques chiffres : Pour une modeste matrice 25×25, on a $25! \simeq 1,5 \times 10^{25}$ opérations. Un ordinateur téraflops, c'est-à-dire capable d'effectuer 10^{12} opérations en virgule flottante par seconde aurait besoin d'environ 500 000 ans de fonctionnement ininterrompu pour effectuer ce calcul.

Ce chiffre est à comparer avec le nombre d'opérations de la méthode de Gauss. Dans ce cas, l'ordre est de 10^5 opérations, que le même ordinateur effectuera en $0,1$ millionièmes de secondes.

Un peu d'histoire : *À titre d'information, l'ordinateur le plus puissant du monde en 2025 (composé de 591 872 cœurs) atteint une puissance maximale de* $1,7$ *exaflops soit environ* $1,7 \times 10^{18}$ *opérations par seconde. Il s'en tirerait en 4 mois seulement... Avec une matrice* 26×26*, ce chiffre passe à* 7 *années de calcul... 200 ans pour une matrice* 27×27*, ... 5 millions d'années pour une matrice* 30×30.

III. Calculs de déterminants

2. Déterminant d'une matrice 3×3

Proposition 9 (Règle de Sarrus) :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \dots$$

$$- a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}.$$

Exercice 10 :

Soient a, b et c trois scalaires quelconques.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 10 :

Soient a, b et c trois scalaires quelconques.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix}$.

Exercice 10 :

Soient a, b et c trois scalaires quelconques.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 10 :

Soient a, b et c trois scalaires quelconques.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} n! & (n-1)! & (n-2)! \\ (n-1)! & (n-2)! & (n-3)! \\ (n-2)! & (n-3)! & (n-4)! \end{vmatrix}$.

Exercice 10 :

Soient a, b et c trois scalaires quelconques.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} n! & (n-1)! & (n-2)! \\ (n-1)! & (n-2)! & (n-3)! \\ (n-2)! & (n-3)! & (n-4)! \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$.

III. Calculs de déterminants

2. Déterminant d'une matrice 3×3

Exercice 10 :

Soient a, b et c trois scalaires quelconques.

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} n! & (n-1)! & (n-2)! \\ (n-1)! & (n-2)! & (n-3)! \\ (n-2)! & (n-3)! & (n-4)! \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} \mathrm{P}(a) & \mathrm{P}(a+1) & \mathrm{P}(a+2) \\ \mathrm{P}(b) & \mathrm{P}(b+1) & \mathrm{P}(b+2) \\ \mathrm{P}(c) & \mathrm{P}(c+1) & \mathrm{P}(c+2) \end{vmatrix}$ où $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$

Dans un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, il existe un unique n-uplet $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ et on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

IV. Déterminant d'un endomorphisme

1. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base en dimension n

Dans un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, il existe un unique n-uplet $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ et on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Définition 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour toute famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ de n vecteurs de E, on appelle **déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$**, noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right).$$

Définition 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour toute famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ de n vecteurs de E, on appelle **déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$**, noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right).$$

En reprenant les notations ci-dessous et en posant :

$$\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_n) \quad \text{où} \quad \forall\, j \in [\![1\,; n]\!],\ \mathrm{C}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j),\ \text{on a :}$$

$$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det{}_{\mathcal{B}}(\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_n) = \det{}_{\mathcal{B}}(\mathrm{A}).$$

Exercice 11 :

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On considère $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Calculer $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$. Un commentaire ?

Exercice 11 :

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On considère $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Calculer $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$. Un commentaire ?

Dans le plan, la valeur absolue du déterminant de deux vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs, l'unité d'aire étant donnée par le parallélogramme construit sur les deux vecteurs de base.

Ce déterminant est nul si, et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

Exercice 12 :

Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;1)$, $v_2 = (2\,;1\,;3)$ et $v_3 = (1\,;4\,;2)$.

Déterminer $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Un commentaire ?

Exercice 12 :

Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;1)$, $v_2 = (2\,;1\,;3)$ et $v_3 = (1\,;4\,;2)$.

Déterminer $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Un commentaire ?

Dans l'espace, la valeur absolue du déterminant de trois vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ représente le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs, l'unité de volume étant donnée par le parallélépipède construit sur les trois vecteurs de base.

Ce déterminant est nul si, et seulement si les vecteurs sont coplanaires.

Les propriétés suivantes découlent de la définition, des commentaires précédents et des propriétés du déterminant d'une matrice.

Proposition 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.

L'application $\det_{\mathcal{B}} : \mathrm{E}^n \longmapsto \mathbb{K}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chaque variable : $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire.

Les propriétés suivantes découlent de la définition, des commentaires précédents et des propriétés du déterminant d'une matrice.

Proposition 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.

L'application $\det_{\mathcal{B}} : \mathrm{E}^n \longmapsto \mathbb{K}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chaque variable : $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire.
- $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique : la transposition de deux vecteurs change $\det_{\mathcal{B}}$ en son opposé.

Les propriétés suivantes découlent de la définition, des commentaires précédents et des propriétés du déterminant d'une matrice.

Proposition 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.

L'application $\det_{\mathcal{B}} : \mathrm{E}^n \longmapsto \mathbb{K}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chaque variable : $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire.
- $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique : la transposition de deux vecteurs change $\det_{\mathcal{B}}$ en son opposé.
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Les propriétés suivantes découlent de la définition, des commentaires précédents et des propriétés du déterminant d'une matrice.

Proposition 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.

L'application $\det_{\mathcal{B}} : \mathrm{E}^n \longmapsto \mathbb{K}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chaque variable : $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire.
- $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique : la transposition de deux vecteurs change $\det_{\mathcal{B}}$ en son opposé.
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
- On ne change pas la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.

Les propriétés suivantes découlent de la définition, des commentaires précédents et des propriétés du déterminant d'une matrice.

Proposition 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.

L'application $\det_{\mathcal{B}} : \mathrm{E}^n \longmapsto \mathbb{K}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chaque variable : $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire.
- $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique : la transposition de deux vecteurs change $\det_{\mathcal{B}}$ en son opposé.
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
- On ne change pas la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.
- Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$.

Théorème II (Caractérisation des bases) :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

Définition/Théorème 5 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et f un endomorphisme de E.

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.

On l'appelle le déterminant de f et on le note $\det(f)$.

Définition/Théorème 5 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et f un endomorphisme de E.

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.

On l'appelle le déterminant de f et on le note $\det(f)$.

Remarque : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors :

$$\det(f) = \det(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Ainsi, $|\det(f)|$ est le coefficient par lequel f multiplie les volumes.

IV. Déterminant d'un endomorphisme

2. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Exemples 3 :

- $\det\left(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\right) = \det\left(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}(e_1), \dots, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}(e_n)\right) = \det\left(e_1, \dots, e_n\right) = 1.$

Exemples 3 :

- $\det\left(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}\right) = \det\left(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}(e_1), \dots, \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}(e_n)\right) = \det\left(e_1, \dots, e_n\right) = 1$.
- $\det\left(\lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}\right) = \det\left(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\right) = \lambda^n$.

Exemples 3 :

- $\det(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = \det\left(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}(e_1), \dots, \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}(e_n)\right) = \det(e_1, \dots, e_n) = 1.$
- $\det(\lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = \det(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n) = \lambda^n.$
- Soit p la projection sur F dans la direction de $\mathrm{G} \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$.
  En prenant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la somme direct $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\det(p) &= \det\left(p(e_1), \dots, p(e_p), p(e_{p+1}), \dots, p(e_n)\right) \\ &= \det(e_1, \dots, e_p, 0_{\mathrm{E}}, \dots, 0_{\mathrm{E}}) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemples 3 :

- $\det(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \det(\mathrm{Id}_\mathrm{E}(e_1), \dots, \mathrm{Id}_\mathrm{E}(e_n)) = \det(e_1, \dots, e_n) = 1.$
- $\det(\lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \det(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n) = \lambda^n.$
- Soit p la projection sur F dans la direction de $\mathrm{G} \neq \{0_\mathrm{E}\}$.
  En prenant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la somme direct $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\det(p) &= \det(p(e_1), \dots, p(e_p), p(e_{p+1}), \dots, p(e_n)) \\ &= \det(e_1, \dots, e_p, 0_\mathrm{E}, \dots, 0_\mathrm{E}) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G.
  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la somme direct $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\det(s) &= \det(s(e_1), \dots, s(e_p), s(e_{p+1}), \dots, s(e_n)) \\ &= \det(e_1, \dots, e_p, -e_{p+1}, \dots, -e_n) \\ &= (-1)^{n-p}.\end{aligned}$$

Toutes les propriétés qui suivent découlent directement de celles démontrées pour le déterminant d'une matrice.

Toutes les propriétés qui suivent découlent directement de celles démontrées pour le déterminant d'une matrice.

Proposition 12 :

Soient f, $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$$\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f).$$

Toutes les propriétés qui suivent découlent directement de celles démontrées pour le déterminant d'une matrice.

Proposition 12 :

Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

$$\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f).$$

Théorème 13 (Caractérisation des automorphismes) :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et f une application linéaire de E.

$$f \text{ est un isomorphisme de E} \quad \iff \quad \det(f) \neq 0.$$

Dans ce cas, $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Rappel :

On considère un système linéaire $AX = B$ de n equations à n inconnues, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.

Rappel :

On considère un système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ de n equations à n inconnues, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.
2. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{I}_n$.

Rappel :

On considère un système linéaire $AX = B$ de n equations à n inconnues, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.
2. $A \sim_L I_n$.
3. $A \sim_C I_n$.

Rappel :

On considère un système linéaire $AX = B$ de n equations à n inconnues, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.
2. $A \sim_L I_n$.
3. $A \sim_C I_n$.
4. $A \in \mathcal{G}l(\mathbb{K})$.

Rappel :

On considère un système linéaire $AX = B$ de n equations à n inconnues, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.
2. $A \sim_L I_n$.
3. $A \sim_C I_n$.
4. $A \in \mathcal{G}l(\mathbb{K})$.
5. Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

Rappel :

On considère un système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ de n equations à n inconnues, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.
2. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{I}_n$.
3. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{C}} \mathrm{I}_n$.
4. $\mathrm{A} \in \mathcal{G}l(\mathbb{K})$.
5. Pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
6. Pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.

Rappel :

On considère un système linéaire $AX = B$ de n equations à n inconnues, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.
2. $A \sim_L I_n$.
3. $A \sim_C I_n$.
4. $A \in \mathcal{Gl}(\mathbb{K})$.
5. Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
6. Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
7. Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution.

V. Applications
1. Systèmes linéaires

Rappel :

On considère un système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ de n equations à n inconnues, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. A est de rang n.
2. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{I}_n$.
3. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{C}} \mathrm{I}_n$.
4. $\mathrm{A} \in \mathcal{G}l(\mathbb{K})$.
5. Pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
6. Pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.
7. Le système $\mathrm{AX} = 0_{n,1}$ admet une unique solution.

L'unique solution de ce système est alors $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

Théorème 14 :

Le système linéaire $AX = B$ est de Cramer si, et seulement si $\det(A) \neq 0$.

V. Applications
1. Systèmes linéaires

Théorème 14 :

Le système linéaire $AX = B$ est de Cramer si, et seulement si $\det(A) \neq 0$.

On donne a présent des formules précisant la solution unique d'un tel système.

Proposition 15 (Formules de Cramer (Hors-Programme)) :

Pour toute matrice carrée inversible $A \in \mathcal{Gl}(\mathbb{K})$, la solution $X = (x_1, \dots, x_n)$ du système de Cramer $AX = B$ est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad x_k = \frac{\det\left(C_1(A), \dots, \overset{\substack{\text{position } k\\ \downarrow}}{B}, \dots, C_n(A)\right)}{\det(A)}.$$

Remarque : Ces formules n'ont pas d'intérêt pratique, puisqu'elles nécessitent le calcul de déterminants couteux en opérations, alors que l'inversion d'une matrice (et donc la résolution du système) nécessite $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ opérations.

V. Applications

1. Systèmes linéaires

Remarque : Ces formules n'ont pas d'intérêt pratique, puisqu'elles nécessitent le calcul de déterminants couteux en opérations, alors que l'inversion d'une matrice (et donc la résolution du système) nécessite $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ opérations.

Elles ont, en revanche, un intérêt théorique car elles permettent, lorsque le système dépend d'un paramètre, d'étudier la continuité, dérivabilité, … des solutions en fonction de ce paramètre.

Exercice 13 :

À l'aide des formules de Cramer, résoudre le système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 7 \\ -3x_1 + x_3 & = -8 \\ x_2 + 2x_3 & = -3 \end{cases}.$$

V. Applications

2. Équation des hyperplans vectoriels

Théorème 16 :

Soit E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{vect}\,(v_2, \dots, v_n)$ un hyperplan de E.

Alors, pour tout $v \in \mathrm{E}$:

$$v \in \mathrm{H} \iff \det{}_{\mathcal{B}}(v, v_2, \dots, v_n) = 0.$$

Théorème 16 :

Soit E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{vect}\,(v_2, \dots, v_n)$ un hyperplan de E.

Alors, pour tout $v \in \mathrm{E}$:

$$v \in \mathrm{H} \iff \det{}_{\mathcal{B}}(v, v_2, \dots, v_n) = 0.$$

Remarque : Ainsi H est le noyau de la forme linéaire non nulle :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & \det{}_{\mathcal{B}}(v, v_2, \dots, v_n) \end{array}$$

et H est défini par l'équation linéaire $\varphi(v) = 0$.

Exercice 14 :

Déterminer l'équation cartésienne :

1. du plan vectoriel dirigé par les vecteurs $v_1 = (1\,;0\,;-1)$, et $v_2 = (1\,;1\,;1)$.

Exercice 14 :

Déterminer l'équation cartésienne :

1. du plan vectoriel dirigé par les vecteurs $v_1 = (1\,;0\,;-1)$, et $v_2 = (1\,;1\,;1)$.
2. du plan passant par les points $\mathrm{A}\,(1\,;0\,;0)$, $\mathrm{B}\,(0\,;1\,;0)$ et $\mathrm{C}\,(0\,;0\,;1)$.