Déterminants

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ où ω est une racine cubique de l'unité.

4. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \dots & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \dots & a_1-b_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_n-b_1 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 3)$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Pour 26 : Chercher une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On notera α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique, et on exprimera le déterminant en fonction de α et β.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, 0, m)$ et $w = (m, 1, 1)$.

Déterminer les valeurs du réel m tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : On note pour $(a, b, c, x) \in \mathbb{R}^4$ et $\mathrm{D}(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{D}(x)$ ne dépend pas de x, et que $\mathrm{D}(x) \leqslant 0$.

Exercice 4 : Calculer $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ n & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & 4 & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 5 : Calculer les déterminants suivants (les premiers de taille n et le troisième $2n$)

$$\mathrm{D}_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & (0) & \\ & 1 & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & & b & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & b & b & & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & b & 0 & & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 6 : Calculer le déterminant de :

1. $\mathrm{A} = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$;
2. $\mathrm{B} = \left(|i-j|\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
3. $\mathrm{C} = \left(\delta_{i+j,n+1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
4. $\left(\mathrm{sh}\ (a_i + a_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Exercice 7 (Déterminant de Hurwitz) : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $b \neq c$.

On considère $\mathrm{D}(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{vmatrix}$

1. Montrer que $\mathrm{D}(a+\mathrm{X}, b+\mathrm{X}, c+\mathrm{X}) \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.
2. En déduire $\mathrm{D}(a+\mathrm{X}, b+\mathrm{X}, c+\mathrm{X})$ puis $\mathrm{D}(a,b,c)$.

Exercice 8 (Déterminant de Vandermonde [1]) : Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1, \ldots, a_n$ n éléments d'un corps $\mathbb{K}$.

On appelle déterminant de Vandermonde l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \det\left(\left(a_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que, $\forall\, n \geqslant 2$, $\mathrm{V}(a_1, \ldots, a_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

[1]. Alexandre-Théophile Vandermonde (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le **28 février 1735** et mort à Paris le **1er janvier 1796**, est un mathématicien français. Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant.