Déterminants

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ où ω est une racine cubique de l'unité.

4. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Déterminants

28. $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \dots & \dots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \dots & a_1-b_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_n-b_1 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 3)$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Pour 26 : Chercher une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On notera α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique, et on exprimera le déterminant en fonction de α et β.

Correction :

1. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$. Donc $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7\times4-11\times(-8) = 116$.
2. Nous allons voir différentes méthodes pour calculer les déterminants.

   Première méthode. *Règle de Sarrus.* Pour le matrice 3×3 il existe une formule qui permet de calculer directement le déterminant.

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

   Donc

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1\times4\times21 + 0\times15\times5 + 3\times6\times6 - 5\times4\times6 - 6\times15\times1 - 3\times0\times21 = -18$$

   Attention ! La règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices 3×3.
3. **Deuxième méthode.** *Se ramener à une matrice diagonale ou triangulaire.*

   Si dans une matrice on change un ligne L_i en $L_i - \lambda L_j$ alors le déterminant reste le même. Même chose avec les colonnes.

   $$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1\times4\times(-\tfrac{3}{2}) = -6$$

On a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice diagonale (ou triangulaire) est le produit des coefficients sur la diagonale.

4. **Troisième méthode.** *Développement par rapport à une ligne ou une colonne.* Nous allons développer par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-0) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (+3) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 3 \times 7 - 1 \times 7 = 14$$

Bien souvent on commence par simplifier la matrice en faisant apparaître un maximum de 0 par les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Puis on développe en choisissant la ligne ou la colonne qui a le plus de 0.

5. On fait apparaître des 0 sur la première colonne puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

Pour calculer le déterminant 3×3 on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on la développe.

$$-\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = -96$$

Donc $\Delta = 96$.

6. La matrice a déjà beaucoup de 0 mais on peut en faire apparaître davantage sur la dernière colonne, puis on développe par rapport à la dernière colonne.

$$\Delta' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

7. Toujours la même méthode, on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta'' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la deuxième colonne :

$$\Delta'' = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

8. Par la règle de Sarrus :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

9. On développe par rapport à la seconde ligne qui ne contient qu'un coefficient non nul et on calcule le déterminant 3×3 par la règle de Sarrus :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

10.

$$\Delta_3 = \begin{array}{c} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_1 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\Delta_3 = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

11. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses lignes et aussi chacune de ses colonnes. Par exemple les coefficients de la première ligne sont tous des multiples de 5 donc

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On fait la même chose avec la troisième ligne :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Et enfin les coefficients la première colonne sont des multiples de 2 et ceux de la troisième colonne sont des multiples de 7 donc :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times 2 \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Les coefficients sont plus raisonnables ! On fait $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1$ pour obtenir :

$$\Delta_4 = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times 56 = 7840$$

12.
$$\Delta_5 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3}}{=} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & 0 & a & a \\ -c & c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On fait ensuite les opérations suivantes sur les colonnes : $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$ pour obtenir une dernière ligne facile à développer :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b & b \\ c & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +c \times \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & -2b & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = bc(bc - 4a^2)$$

13. On fait d'abord les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ et on développe par rapport à la première ligne :

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant à calculer se développe par rapport à la deuxième colonne et le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_6 = (-2) \times a \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times b \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = 4a^3 + 27b^2$$

14. Nous allons permuter des lignes et des colonnes pour se ramener à une matrice diagonale par blocs. Souvenons-nous que lorsque l'on échange deux lignes (ou deux colonnes) alors le déterminant change de signe. Nous allons rassembler les zéros. On commence par échanger les colonnes C_1 et C_3 : $C_1 \leftrightarrow C_3$:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on échange les lignes L_1 et L_4 : $L_1 \leftrightarrow L_4$:

$$\Delta_7 = + \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Notre matrice est sous la forme d'une matrice diagonale par blocs et son déterminant est le produit des déterminants.

$$\Delta_7 = \left|\begin{array}{cc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-31) \times (-6) = 186$$

Déterminants

15. On retire la première colonne à toutes les autres colonnes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_1 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2-a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne :

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1}a_1 \begin{vmatrix} a_2-a_1 & & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_2-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_1(a_2-a_1)^{n-1}$$

Où l'on a reconnu le déterminant d'un matrice triangulaire supérieure. Donc

$$\Delta_1 = a_1(a_1-a_2)^{n-1}.$$

16. On va transformer la matrice correspondante en une matrice triangulaire supérieure, on commence par remplacer la ligne L_2 par $L_2 - L_1$ (on ne note que les coefficients non nuls) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & -1 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on remplace la ligne L_3 par $L_3 - L_2$ (attention il s'agit de la nouvelle ligne L_2) et on continue ainsi de suite jusqu'à $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$ (n est la taille de la matrice sous-jacente) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & (-1)^n \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On fait attention pour le dernier remplacement $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ légèrement différent et qui conduit au déterminant d'une matrice triangulaire : :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & -1 \\ & 0 & 1 & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & (-1)^n \\ & & & 0 & 1-(-1)^n \end{vmatrix} = 1-(-1)^n.$$

En conclusion $\Delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

17. On retire la colonne C_1 aux autres colonnes C_i pour faire apparaître des 0 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -b & & \cdots & -b \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

On remplace ensuite L_1 par $L_1+L_2+L_3+\cdots+L_n$ (ou ce qui revient au même : faites les opérations $L_1 \leftarrow L_1+L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1+L_3$,...chacune de ces opérations fait apparaître un 0 sur la première ligne) pour obtenir une matrice triangulaire inférieure :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} na+b & 0 & & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1}.$$

18. $(a+b+c)^3$
19. $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$
20. $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.
21. $-(a^3-b^3)^2$.
22. $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ où $\alpha \neq \beta$ sont les racines de $X^2-aX+bc=0$.

    $(n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ si $\alpha=\beta$.
23. $a^{n-3}(a-b)(a^2+ab-2(n-2)b^2)$.
24. 1.
25. $a_1a_2\dots a_n\left(1+\dfrac{b_1}{a_1}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}\right)$.
26. 0
27. Notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\mathrm{mod}\, 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

    $\varepsilon_n \dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.
28. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u=(1,2,-1)$, $v=(3,0,m)$ et $w=(m,1,1)$.

Déterminer les valeurs du réel m tel que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : On note pour $(a,b,c,x)\in\mathbb{R}^4$ et $D(x)=\begin{vmatrix}\cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c)\\ \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c)\\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b)\end{vmatrix}$.

Montrer que $D(x)$ ne dépend pas de x, et que $D(x)\leqslant 0$.

Exercice 4 : Calculer $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & \dots & \dots & n\\ n & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 3 & 4 & \ddots & 1 & 2\\ 2 & 3 & \dots & n & 1\end{vmatrix}$

Correction : La somme par lignes est constante. On ajoute à C_1 toutes les autres colonnes :

$$D=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n\\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & \ddots & 1 & 2\\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1\end{vmatrix}_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & 4 & \ddots & 1 & 2\\ 1 & 3 & \cdots & n & 1\end{vmatrix}_n$$

$\forall\, i\in[\![1\,;n-1]\!]$, $L_i\leftarrow L_i-L_{i+1}$:

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & 1-n & 1\\ 1 & 3 & \cdots & n & 1\end{vmatrix}_n$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1-n & 1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$\forall\, i\in[\![2\,;n-1]\!]$, $C_i\leftarrow C_i-C_1$:

$$=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1-n & n & n & \cdots & n\\ 1 & -n & 0 & \vdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & -n & 0\end{vmatrix}_{n-1}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$= (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} n & n & \cdots & \cdots & n \\ -n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -n & 0 \end{vmatrix}_{n-2}$$

$\forall\, i \in [\![2\,;n-1]\!]$, $L_i \leftarrow L_i + L_{i-1}$:

$$= (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} n & n & \cdots & n \\ 0 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{n-2} = (-1)^{n+1}\frac{n^{1+n-2}(n+1)}{2}$$

Donc, $D = \dfrac{(-1)^{n+1}n^{n-1}(n+1)}{2}$.

Exercice 5 : Calculer les déterminants suivants (les premiers de taille n et le troisième $2n$)

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & & (0) & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & & b & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & b & b & & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & b & 0 & & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 6 : Calculer le déterminant de :

1. $A = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$;
2. $B = (|i-j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
3. $C = \left(\delta_{i+j,n+1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
4. $\left(\text{sh}\,\left(a_i + a_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Exercice 7 (Déterminant de Hurwitz) : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $b \neq c$.

On considère $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{vmatrix}$

1. Montrer que $D(a+X, b+X, c+X) \in \mathbb{R}_1[X]$.
2. En déduire $D(a+X, b+X, c+X)$ puis $D(a,b,c)$.

Déterminants

Exercice 8 (Déterminant de Vandermonde [1]) : Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots, a_n$ n éléments d'un corps $\mathbb{K}$.

On appelle déterminant de Vandermonde l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det\left(\left(a_i^{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que, $\forall\, n \geqslant 2$, $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$.

Correction : Ce déterminant est un grand classique de prépa. On présente, pour cela, plusieurs méthode partant de la plus naturelle à la plus … stylée (vision toute subjective du professeur).

Dans toutes ces méthodes, on notera $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice correspondante.

1. Tout d'abord trouvons une relation de récurrence :

   Première et naturelle méthode :

   (a) On fait apparaître un maximum de 0 dans la première colonne en effectuant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour $i \in [\![1\,;n-1]\!]$.

   $$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 0 & a_1 - a_n & a_1^2 - a_n^2 & \dots & a_1^{n-1} - a_n^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_n & a_2^2 - a_n^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

   (b) On développe par rapport à la première colonne :

   $$V(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1^2 - a_n^2 & \dots & a_1^{n-1} - a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}^2 - a_n^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} - a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

   (c) En se rappelant que, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $a_i^k - a_n^k = (a_i - a_n) \sum_{l=0}^{k-1} a_i^l a_n^{k-1-l}$, on factorise la $i^{\text{ème}}$ ligne par $a_i - a_n$ pour $i \in [\![1\,;n-1]\!]$

   $$V(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 + a_n & a_1^2 + a_1 a_n + a_n^2 & \dots & a_1^{n-2} + a_i^{n-3} a_n + \dots + a_1 a_n^{n-3} + a_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} + a_n & a_{n-1}^2 + a_{n-1} a_n + a_n^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} + a_{n-1}^{n-3} a_n + \dots + a_{n-1} a_n^{n-3} + a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

   (d) Pour $j \in [\![2\,;n-1]\!]$ en décroissant, on effectue les opérations successives $C_j \leftarrow C_j - a_n C_{j-1}$:

   $$V(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Donc,

$$V(a_1, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i). \tag{VdM}$$

Deuxième méthode :

(a) Nous allons faire les opérations suivantes sur les colonnes en partant de la dernière colonne : C_n est remplacée par $C_n - a_n C_{n-1}$, puis C_{n-1} est remplacée par $C_{n-1} - a_n C_{n-2}$,... jusqu'à C_2 qui est remplacée par $C_2 - a_n C_1$.

On obtient donc :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_n & a_1^2 - a_1 a_n & \dots & a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n \\ 1 & a_2 - a_n & a_2^2 - a_2 a_n & \dots & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

(b) On développe par rapport à la dernière ligne et on écrit $a_i^k - a_i^{k-1} a_n = a_i^{k-1}(a_i - a_n)$ pour obtenir :

$$V(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \dots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ a_2 - a_n & a_2(a_2 - a_n) & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} - a_n & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

(c) Nous utilisons maintenant la linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes en factorisant la $i^{\text{ème}}$ ligne par $a_i - a_n$:

$$V(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Donc,

$$V(a_1, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i). \tag{VdM}$$

Troisième méthode :

(a) À dernière colonne, on ajoute une combinaison linéaire des colonnes précédentes du type $C_n \leftarrow C_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i$:

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & P(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & P(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & P(a_n) \end{vmatrix},$$

où P est un polynôme unitaire de degré $n-1$.

(b) On choisit alors pour P (le choix des λ_i équivaut au choix de P) le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$ unitaire de degré $n-1$.

Déterminants

(c) La dernière colonne s'écrit alors $(0, \dots, 0, \mathrm{P}(a_n))$ et en développant ce déterminant suivant cette dernière colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{P}(a_n) \times \mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

(d) En tenant compte de $\mathrm{P}(a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$, on retrouve la relation de récurrence :

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i). \qquad \text{(VdM)}$$

Quatrième méthode :

(a) On utilise les idées des méthodes précédentes en introduisant le déterminant $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}, \mathrm{X})$:

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}, \mathrm{X}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \mathrm{X} & \mathrm{X}^2 & \dots & \mathrm{X}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(b) En développant par rapport à la dernière ligne, on remarque que $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}, \mathrm{X})$ est un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré $n-1$.

Pour tout $j \in [\![1\,; n-1]\!]$, $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_j)$ a deux lignes égales donc est nul.

(c) Le polynôme $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}, \mathrm{X})$, admettant les $n-1$ racines a_j, $j \in [\![1\,; n-1]\!]$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}, \mathrm{X}) = \lambda \prod_{j=1}^{n-1} (\mathrm{X} - a_j).$$

(d) Le coefficient de X^{n-1} est λ et, en développant par rapport à la dernière ligne, c'est aussi le mineur $\Delta_{n,n} = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1})$:

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}, \mathrm{X}) = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (\mathrm{X} - a_j).$$

(e) Pour $\mathrm{X} = a_n$, on retrouve la relation de récurrence :

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i). \qquad \text{(VdM)}$$

2. Démontrons, par récurrence, que $\forall\, n \geqslant 2$, $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Pour $n = 2$, on a bien $\mathrm{V}(a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ et $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (a_j - a_i) = a_2 - a_1$. La relation est initialisée.

Supposons que cette relation soit vérifiée pour un certain entier $n \geqslant 3$, on considère $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$.

D'après (VdM), on a alors :

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i)$$

Avec l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

La relation est donc héréditaire. Initialisée à partir de $n = 2$, elle est donc vraie pour tout entier supérieur à 2 :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Déterminants

[1]. Alexandre-Théophile Vandermonde (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le **28 février 1735** et mort à Paris le **1er janvier 1796**, est un mathématicien français. Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant.