

Fonctions de deux variables

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 34



- 1 Approche graphique
- 2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2
- 3 Continuité
- 4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}
- 5 Gradient
- 6 Dérivées partielles et composées
- 7 Extrema





our ce dernier chapitre de l'année, nous allons faire un rapide survol des techniques d'étude et de calcul liées aux fonctions à deux variables que vous approfondirez l'an prochain. Au programme, des choses que vous avez pour la plupart déjà croisées en physique ou en SII : calcul de dérivées partielles, plan tangents, différentielles et un tout petit peu de champs de vecteurs.

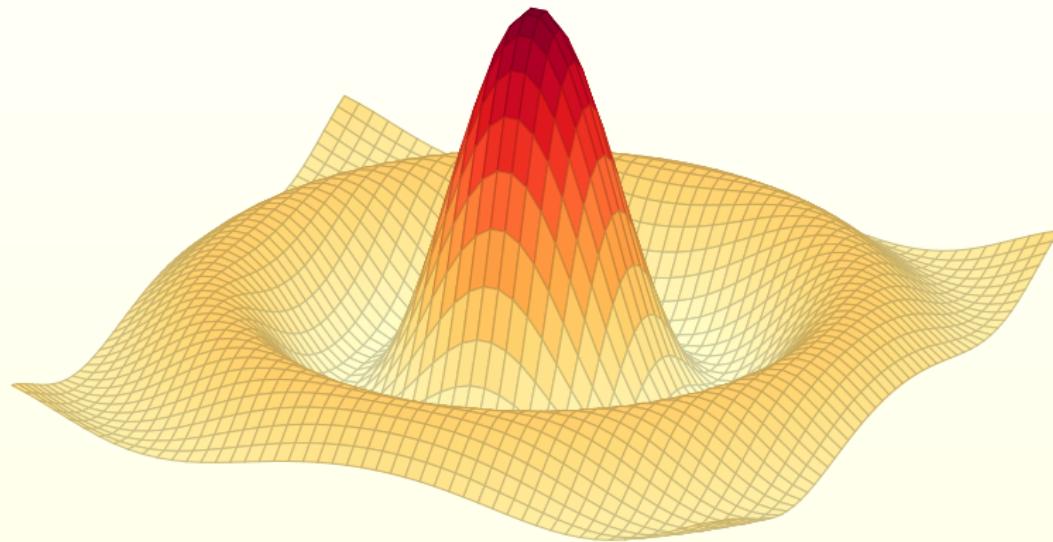


Figure 1 – Surface représentative de la fonction $r \mapsto \frac{\sin(r)}{r}$.



Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique.

Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.



I. Approche graphique

1 Approche graphique

- Graphe
- Lignes de niveau
- Applications partielles

2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

3 Continuité

4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

5 Gradient

6 Dérivées partielles et composées

7 Extrema



I. Approche graphique

Définition 1 :

Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 .

On appelle **fonction à deux variables** toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme pour les fonctions de la variable réelle, Ω est appelé le **domaine de définition** de f .

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x ; y) &\longmapsto \sin(x) \sin(y) \end{aligned}$$

Figure 2 – Fonction à une variable

Figure 3 – Fonction à deux variables



I. Approche graphique

Exercice 1 :

Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

❶ $f : (x ; y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2.$



I. Approche graphique

Exercice 1 :

Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f : (x ; y) &\mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2. \\ \textcircled{2} \quad g : (x ; y) &\mapsto \frac{1}{|x - y|}. \end{aligned}$$



I. Approche graphique

1. Graphe

Nous avons l'habitude de représenter toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par une courbe dans le plan \mathbb{R}^2 , précisément la courbe d'équation $y = f(x)$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sera, quant à elle, représentée par une surface de l'espace \mathbb{R}^3 d'équation $z = f(x ; y)$.



I. Approche graphique

1. Graphe

Définition 2 (Surface représentative) :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

On appelle **surface représentative** de f l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\}$$

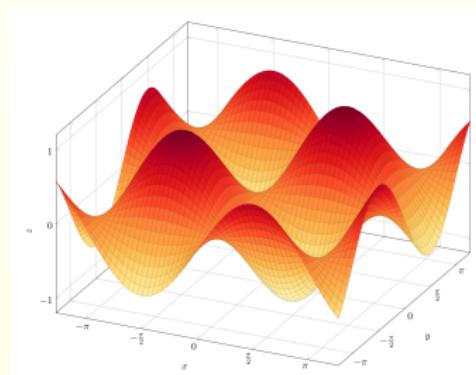


Figure 4 – $z = \sin(x)\sin(y)$

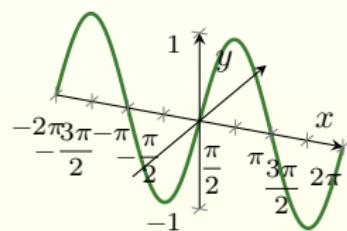


Figure 5 – $z = \sin(x)$



I. Approche graphique

1. Graphe

Définition 2 (Surface représentative) :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

On appelle **surface représentative** de f l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\}$$

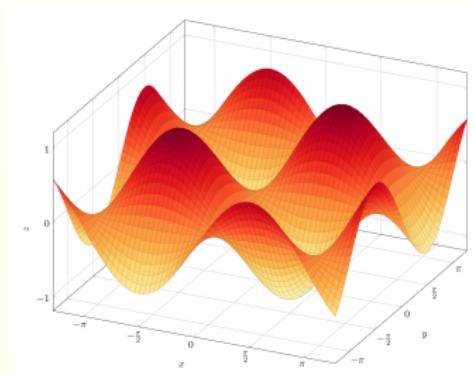


Figure 4 – $z = \sin(x) \sin(y)$

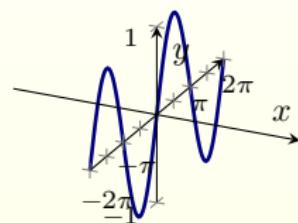


Figure 6 – $z = \sin(y)$



I. Approche graphique

1. Graphe

Définition 2 (Surface représentative) :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

On appelle **surface représentative** de f l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\}$$

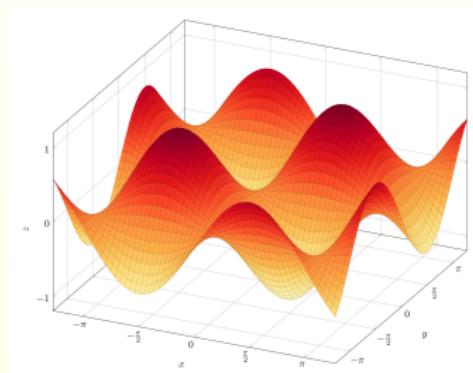


Figure 4 – $z = \sin(x) \sin(y)$

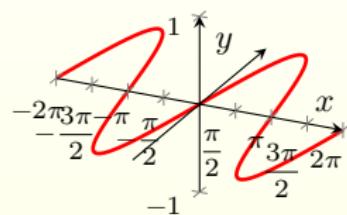


Figure 7 – $y = \sin(x)$



I. Approche graphique

1. Graphe

Intéressons-nous, par exemple, à la fonction $(x ; y) \mapsto x^2 + \sin(3y)$.

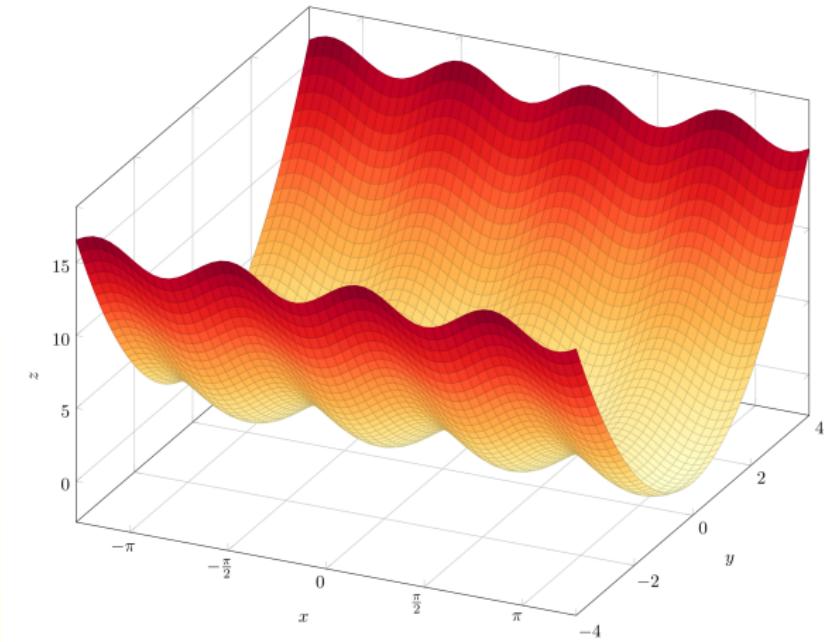


Figure 8 – $z = x^2 + \sin(3y)$



I. Approche graphique

1. Graphe

Pour construire son graphe \mathcal{S} , on étudie souvent son intersection avec une collection de plans parallèles qui balaient l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,

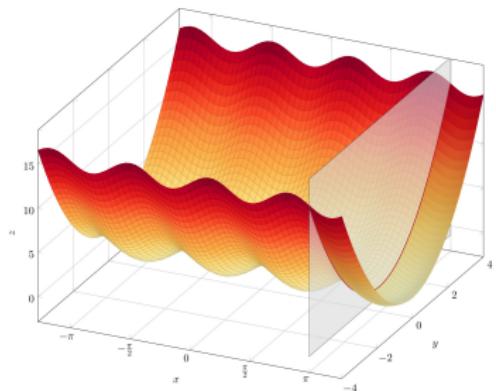


Figure 9 – Intersection de \mathcal{S} avec $x = \pi$.



I. Approche graphique

1. Graphe

Pour construire son graphe \mathcal{S} , on étudie souvent son intersection avec une collection de plans parallèles qui balaient l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,
- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan,

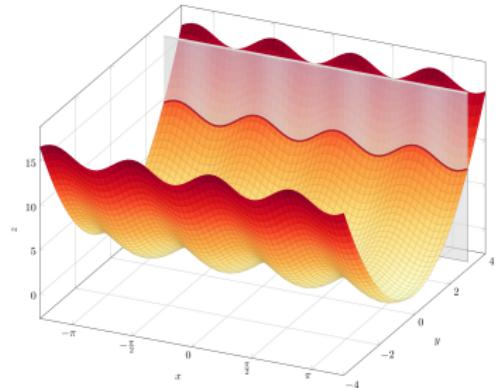


Figure 9 – Intersection de \mathcal{S} avec $y = 2$.



I. Approche graphique

1. Graphe

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,
- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan,
- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $z = \lambda$ est la courbe d'équation $x^2 + \sin(3y) = \lambda$ dans ce plan. Ces courbes particulières s'appelle des **lignes de niveau** λ de f (*confer* paragraphe (2)).

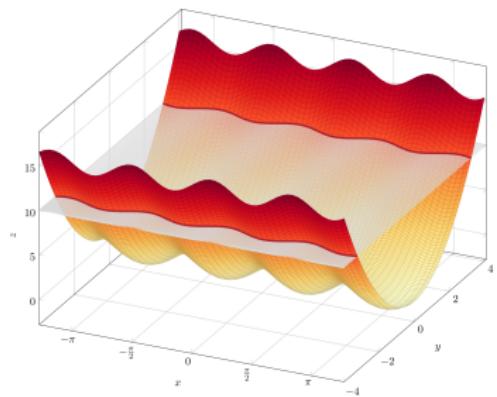


Figure 9 – Intersection de \mathcal{S} avec $z = 10$.



I. Approche graphique

1. Graphe

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,
- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan,
- l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $z = \lambda$ est la courbe d'équation $x^2 + \sin(3y) = \lambda$ dans ce plan. Ces courbes particulières s'appelle des **lignes de niveau** λ de f (*confer* paragraphe (2)).

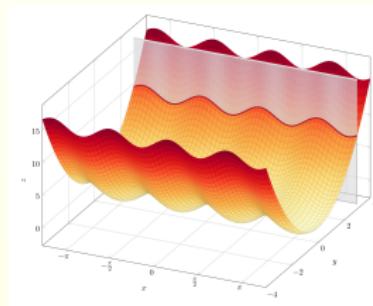


Figure 9 – Intersection de \mathcal{S} avec $y = 2$.

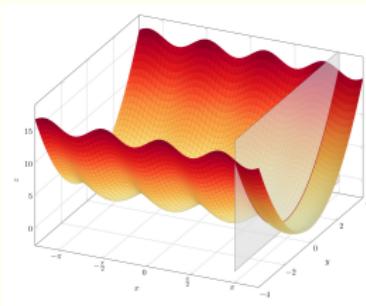


Figure 10 – Intersection de \mathcal{S} avec $x = \pi$.

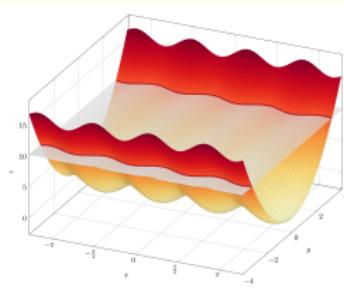


Figure 11 – Intersection de \mathcal{S} avec $z = 10$.



I. Approche graphique

1. Graphe

Faites l'effort de réfléchir en les mêmes termes aux exemples qui suivent et assurez-vous de bien les comprendre.

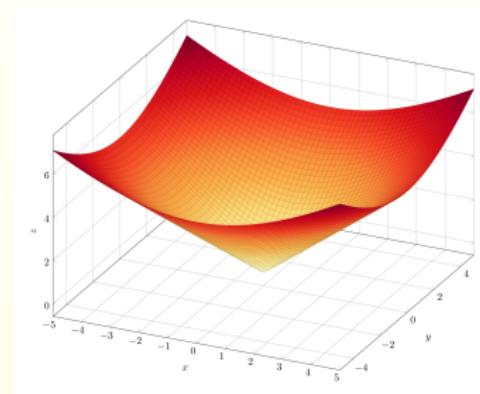


Figure 12 – $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

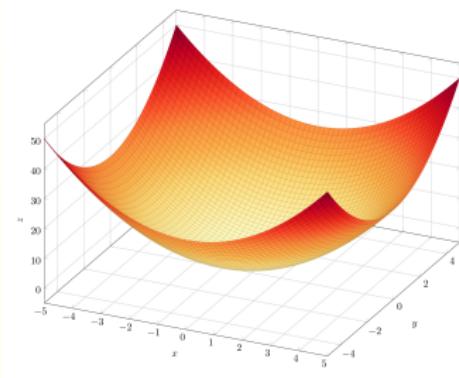


Figure 13 – $z = x^2 + y^2$.



I. Approche graphique

1. Graphe

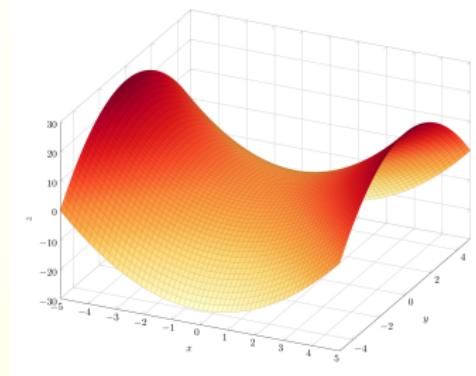


Figure 14 – $z = x^2 - y^2$.

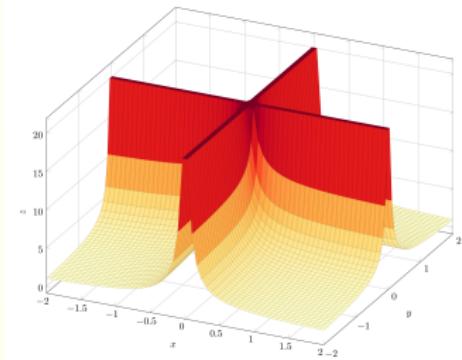


Figure 15 – $z = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$.



I. Approche graphique

1. Graphe

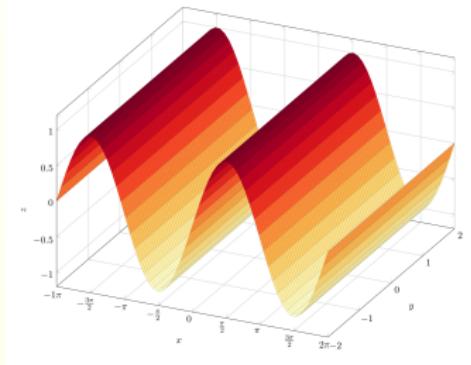


Figure 16 – $z = \sin(x)$.

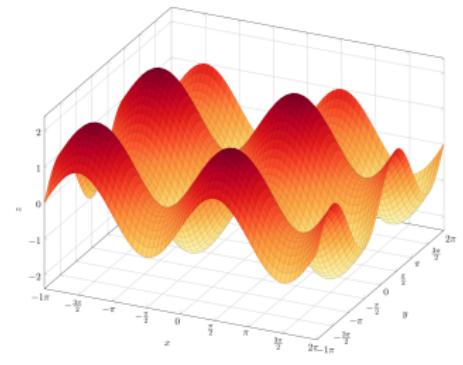


Figure 17 – $z = \sin(x) + \sin(y)$.



I. Approche graphique

1. Graphe

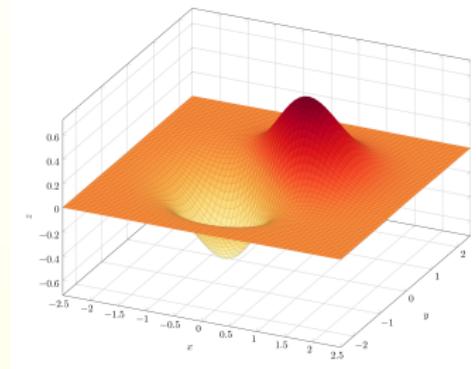


Figure 18 – $z = (x + y) e^{-(x^2+y^2)}$.

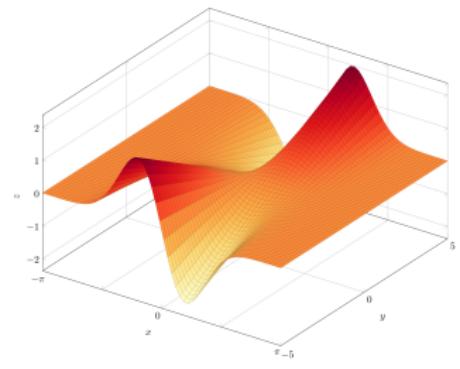


Figure 19 – $z = y \sin(x) e^{-x^2}$.



I. Approche graphique

2. Lignes de niveau

Définition 3 (Lignes de niveau) :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** k , ou **courbe de niveau** k , l'ensemble

$$L_k = \{(x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = k\}.$$



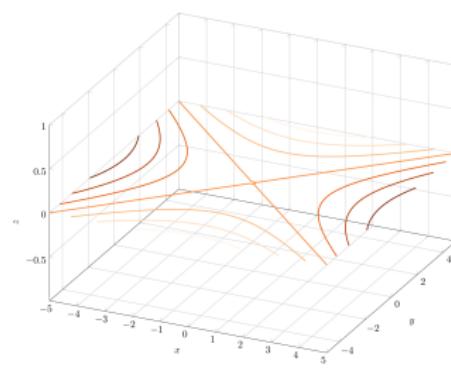
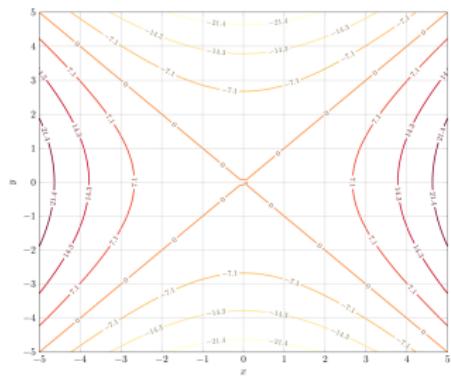
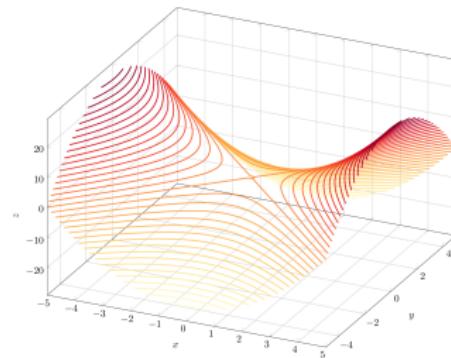
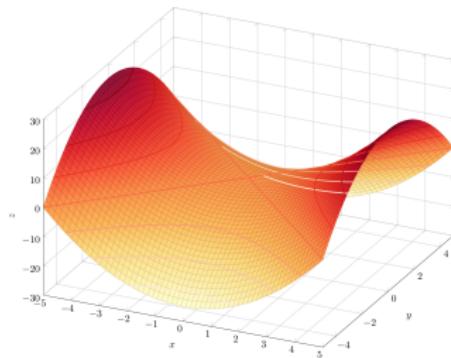


Figure 20 – Lignes de niveau de $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.



I. Approche graphique

2. Lignes de niveau

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x; y) \mapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.



I. Approche graphique

2. Lignes de niveau

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x; y) \mapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- La ligne de niveau 0 est constituée des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.



I. Approche graphique

2. Lignes de niveau

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x; y) \mapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- La ligne de niveau 0 est constituée des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.



I. Approche graphique

2. Lignes de niveau

Exemple 1 :

Considérons la fonction $(x; y) \mapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- La ligne de niveau 0 est constituée des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

De manière générale, toute courbe joignant des points d'égale valeur est appelée **isoplète**. Elle sépare des zones de faibles valeurs et des zones de valeurs plus élevées. Toutes les courbes iso... que vous connaissez sont des **isoplèthes**.



I. Approche graphique

2. Lignes de niveau

Exemple 2 :

Si f est la fonction qui, à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte ni ne descend.

Ce sont ces lignes (dites de niveau) qui sont représentées sur les cartes topographiques.

Plus les courbes de niveau sont serrées, plus l'altitude varie rapidement, plus la pente est forte.



Figure 21 – Les lignes de niveau autour du mont Fuji



I. Approche graphique

2. Lignes de niveau

Exemple 3 :

Si f est la fonction qui, à la longitude et à la latitude associe la pression (au niveau de la mer), alors les lignes de niveau relient des points d'égale pression. Ces lignes sont appelées en météorologie des courbes isobares.

Lorsque les isobares forment des boucles fermées, la plus petite boucle au centre indique le centre de pression.

Un système anticyclonique est représenté par un « H » en anglais et un système dépressionnaire est représenté par un « L » en anglais.

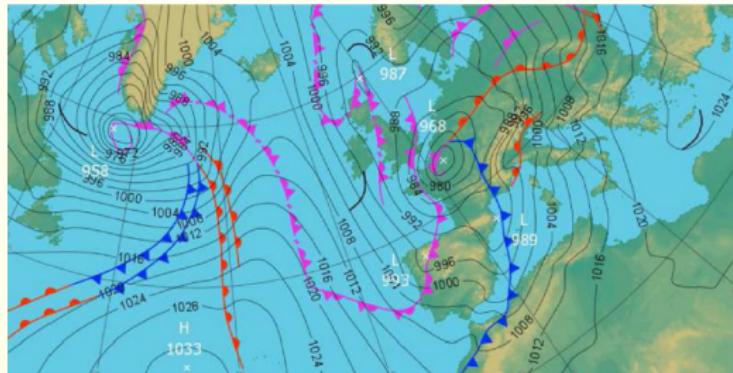


Figure 22 – Courbes isobares : La vitesse du vent est fonction de l'écartement des isobares : plus les isobares sont serrées, plus la pression varie rapidement, plus le vent souffle fort.

I. Approche graphique

3. Applications partielles

Définition 4 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(\cdot, y_0)$ ou f_{y_0} l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x, y_0) \in \Omega$.

$$f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$$



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Définition 4 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(\cdot, y_0)$ ou f_{y_0} l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x, y_0) \in \Omega$.

$$f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$$

- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(x_0, \cdot)$ ou f_{x_0} l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ qui est définie sur l'ensemble des réels y tels que $(x_0, y) \in \Omega$.

$$f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$$



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Définition 4 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(\cdot, y_0)$ ou f_{y_0} l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x, y_0) \in \Omega$.

$$f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$$

- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(x_0, \cdot)$ ou f_{x_0} l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ qui est définie sur l'ensemble des réels y tels que $(x_0, y) \in \Omega$.

$$f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$$

$f(\cdot, y_0)$ et $f(x_0, \cdot)$ sont appelées **applications partielles** de f en (x_0, y_0) .



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = x_0$ et $x = x_0$. *confer* paragraphe (1) .

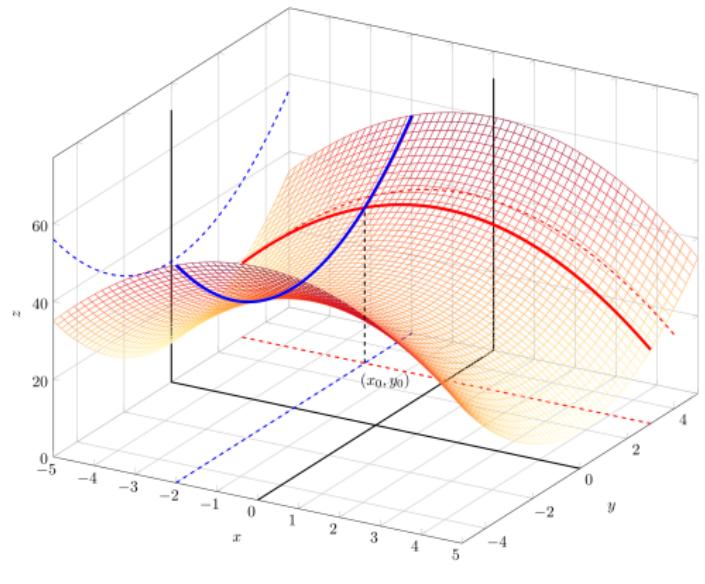


Figure 23 – $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 - y^2$ avec ses fonctions partielles
 $f_{x_0} : (x_0, y) \mapsto f(x_0, y)$ et $f_{y_0} : (x, y_0) \mapsto f(x, y_0)$.



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Exemple 4 :

Considérons la fonction $z \mapsto x^2 - y^2$ et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Les fonctions partielles sont des paraboles de concavité contraire :

$$x \mapsto x^2 - y_0^2 \quad \text{et} \quad y \mapsto -y^2 + x_0^2.$$

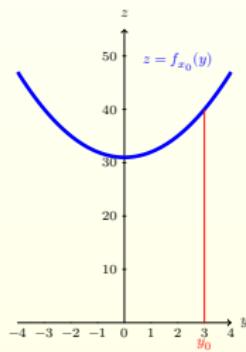


Figure 24 – $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Exemple 4 :

Considérons la fonction $z \mapsto x^2 - y^2$ et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Les fonctions partielles sont des paraboles de concavité contraire :

$$x \mapsto x^2 - y_0^2 \quad \text{et} \quad y \mapsto -y^2 + x_0^2.$$

- Les lignes de niveau $k \in \mathbb{R}$ sont des hyperboles d'équation $x^2 - y^2 = k$ ou les deux bissectrices lorsque $k = 0$.

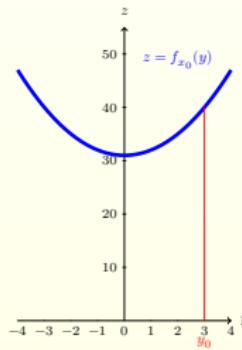


Figure 24 – $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$

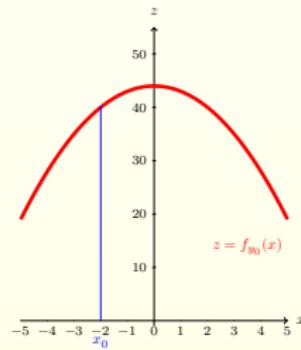


Figure 25 – $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$



I. Approche graphique

3. Applications partielles

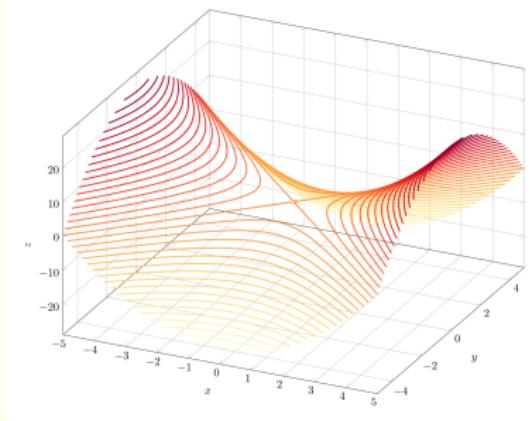


Figure 27 – Lignes de niveau de $(x ; y) \mapsto x^2 - y^2$.

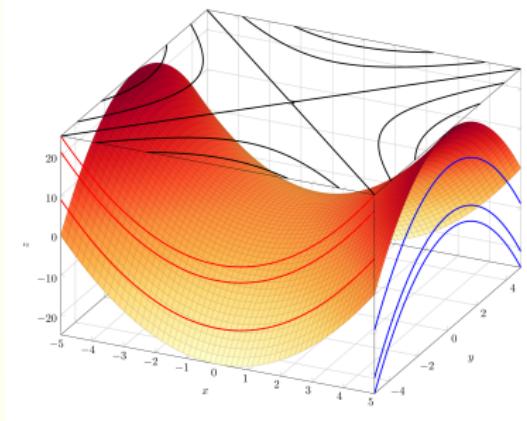


Figure 28 – Différences entre fonctions partielles et lignes de niveau de $(x ; y) \mapsto x^2 - y^2$.



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Exemple 5 :

Considérons la fonction $f : (x ; y) \mapsto x^2 + y^2$.

- l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $f_{y,1} : x \mapsto x^2 + 1$.
- l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $f_{x,2} : y \mapsto y^2 + 4$.
- Les applications partielles sont toutes représentées par des paraboles.
En particulier, à l'origine, elles ont pour équation $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y^2$.
- Les lignes de niveau sont des cercles.



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Remarque : Les courbes des applications partielles et les lignes de niveau permettent de reconstituer l'intégralité de la surface. Par exemple, la **figure (29)** s'appelle un *paraboloïde hyperbolique* tandis que la **figure (30)** est un *paraboloïde de révolution*.

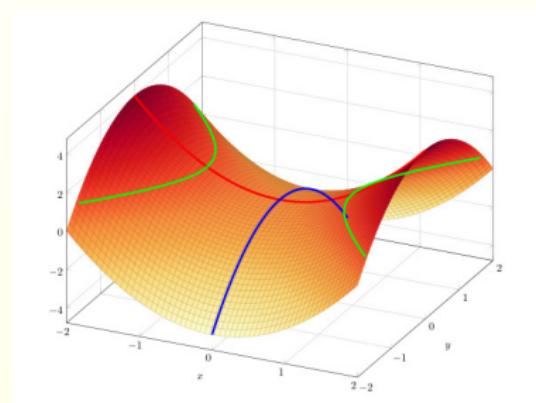


Figure 29 – $z = x^2 - y^2$.

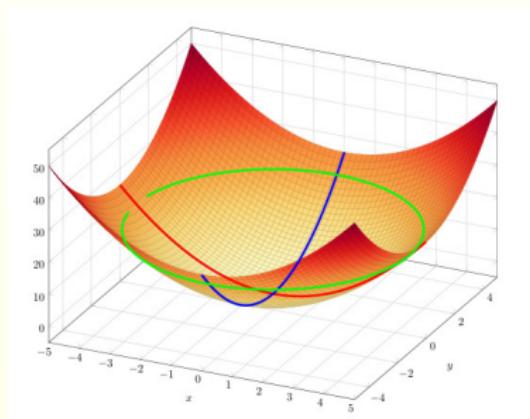


Figure 30 – $z = x^2 + y^2$.



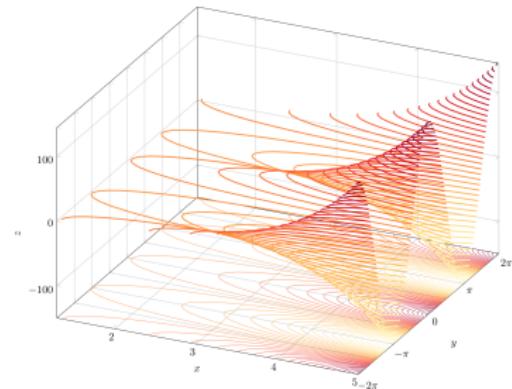
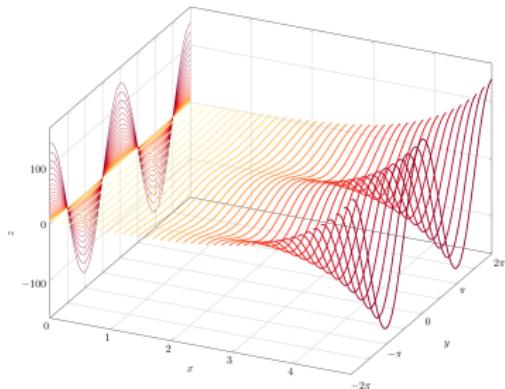
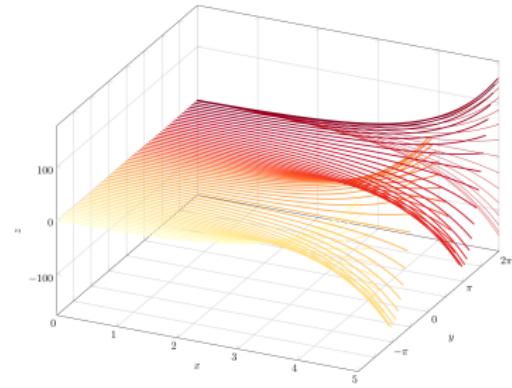
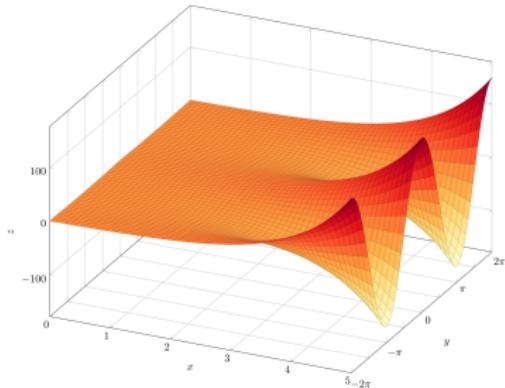


Figure 31 – Différence entre fonctions partielles et lignes de niveau.



I. Approche graphique

3. Applications partielles

Exercice 2 (Applications partielles) :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto e^x \cos(y).$$

Déterminer $f(\cdot, 0)$ et $f(3, \cdot)$.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

1 Approche graphique

2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

- Boules
- Ouverts

3 Continuité

4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

5 Gradient

6 Dérivées partielles et composées

7 Extrema



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

L'idée essentielle, si nous voulons faire un peu d'analyse, est de pouvoir définir la notion de limite d'une fonction en un point.

Globalement, pouvoir exprimer rigoureusement le fait que $f(x)$ peut être « aussi proche » de ℓ que ce que l'on veut à condition que x soit « assez proche » de x_0 , ce que nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ s'écrivait :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \alpha \\ \text{ou} \\ x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\\ \text{ou} \\ d(x_0; x) < \alpha \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ \text{ou} \\ f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\\ \text{ou} \\ d(\ell; f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

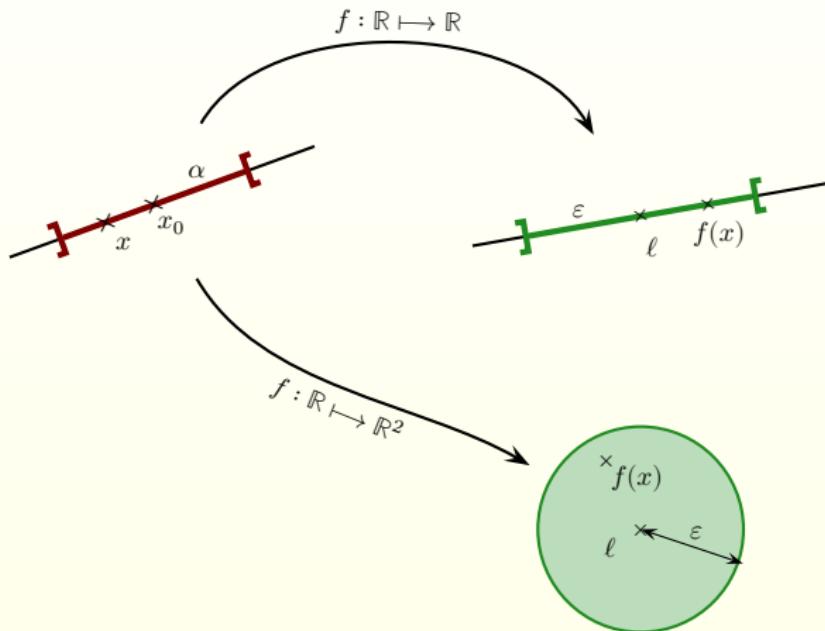


Figure 32 – Fonction à une variable à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 .



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

- Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, nous avons tout d'abord eu recours au module et les expressions ci-dessus restent inchangées :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \alpha \\ \text{ou} \\ x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\\ \text{ou} \\ d(x_0; x) < \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |f(x) - \ell|_{\mathbb{C}} < \varepsilon \\ \text{ou} \\ d(\ell; f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

- Nous pouvons aussi munir \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique *i.e.*



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

- Nous pouvons aussi munir \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique *i.e.*
 - de son produit scalaire :

$$(\cdot|\cdot) : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$
$$\left(\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \quad \mapsto \quad (\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy',$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

■ Nous pouvons aussi munir \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique *i.e.*

- de son produit scalaire :

$$\begin{aligned} (\cdot|\cdot) : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) &\longmapsto (\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy', \end{aligned}$$

- et de sa norme associée :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \|\vec{u}\|_2 = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})} = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

- Nous pouvons aussi munir \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique *i.e.*
 - de son produit scalaire :

$$\begin{aligned} (\cdot|\cdot) : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) &\longmapsto (\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy', \end{aligned}$$

- et de sa norme associée :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \|\vec{u}\|_2 = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})} = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

On identifiera souvent le vecteur $\vec{u}(x; y)$ de \mathbb{R}^2 avec le point M du plan de coordonnées $(x; y)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ *i.e.* on confond \mathbb{R}^2 avec le plan affine \mathcal{P} si bien qu'on notera fréquemment $M = (x; y)$.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

La norme euclidienne permet également de définir une distance sur \mathbb{R}^2 appelée distance euclidienne :

$$\begin{aligned} d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \iff \quad d_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\vec{u}; \vec{v}) &\longmapsto \|\vec{u} - \vec{v}\|_2. \quad (M; M') \longmapsto \|M - M'\|_2 = MM'. \end{aligned}$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

La norme euclidienne permet également de définir une distance sur \mathbb{R}^2 appelée distance euclidienne :

$$\begin{aligned} d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \iff d_2 : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\vec{u}; \vec{v}) &\longmapsto \|\vec{u} - \vec{v}\|_2. \quad (M; M') \longmapsto \|M - M'\|_2 = MM'. \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \alpha \\ \text{ou} \\ x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\\ \text{ou} \\ d(x_0; x) < \alpha \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \|f(x) - \ell\|_2 < \varepsilon \\ \text{ou} \\ d_2(\ell; f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

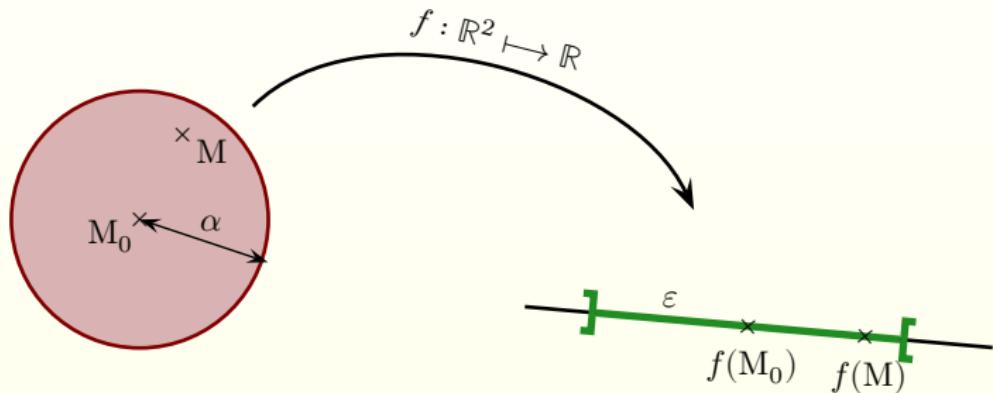


Figure 33 – Fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R} .



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

- Pour une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R} , $\lim_{(x;y) \rightarrow (x_0;y_0)} f(x) = \ell$ s'écrit alors au paragraphe (1) sous la forme légitime :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* / \left\{ \begin{array}{l} \|(x; y) - (x_0; y_0)\|_2 < \alpha \\ \text{ou} \\ M M_0 < \alpha \\ \text{ou} \\ d_2(M_0; M) < \alpha \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} |f(M) - \ell| < \varepsilon \\ \text{ou} \\ f(M) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[\\ \text{ou} \\ d(\ell; f(M)) < \varepsilon. \end{array} \right.$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

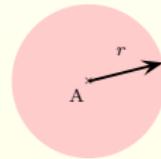
1. Boules

Définition 5 :

Pour tous $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

- **boule ouverte** de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / AM < r\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x; y) - (x_0; y_0)\| < r\}.$$



Boule ouverte :
 $\mathcal{B}(A, r)$

Figure 34 – Boules de centre A dans \mathbb{R}^2 .



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

1. Boules

Définition 5 :

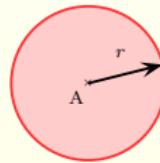
Pour tous $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

- **boule ouverte** de centre A et de rayon r l'ensemble

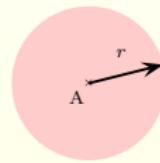
$$\mathcal{B}(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / AM < r\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x; y) - (x_0; y_0)\| < r\}.$$

- **boule fermée** de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}}(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / AM \leq r\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x; y) - (x_0; y_0)\| \leq r\}.$$



Boule fermée :
 $\overline{\mathcal{B}}(A, r)$



Boule ouverte :
 $\mathcal{B}(A, r)$

Figure 34 – Boules de centre A dans \mathbb{R}^2 .



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Définition 6 (Voisinage d'un point) :

- Soit $A \in \mathbb{R}^2$.

On appelle **voisinage de A** toute partie de \mathbb{R}^2 contenant une boule ouverte de centre A.

On notera dans ce cours $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(A)$ ou, plus simplement, $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble des voisinages de A dans \mathbb{R}^2 .



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Définition 6 (Voisinage d'un point) :

- Soit $A \in \mathbb{R}^2$.

On appelle **voisinage de A** toute partie de \mathbb{R}^2 contenant une boule ouverte de centre A.

On notera dans ce cours $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(A)$ ou, plus simplement, $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble des voisinages de A dans \mathbb{R}^2 .

- Soit Ω une partie de \mathbb{R}^2 .

On dit que Ω est (un) **ouvert** si :

$$\forall A \in \Omega, \exists r > 0, \mathcal{B}(A, r) \subset \Omega.$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

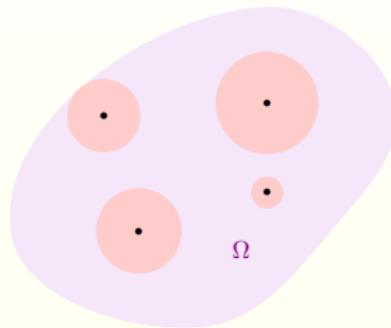


Figure 35 – Un ouvert est (un) voisin(age) de chacun de ses points.

Un ouvert de \mathbb{R}^2 est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il contient une boule ouverte autour de chaque point.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

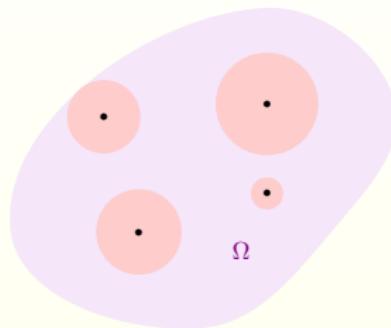


Figure 35 – Un ouvert est (un) voisinage de chacun de ses points.

Un ouvert de \mathbb{R}^2 est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il contient une boule ouverte autour de chaque point.

Intuitivement, un ouvert est un ensemble qui n'a pas de « bord » à l'image des intervalles ouverts de \mathbb{R} . Cette branche des mathématiques s'appelle la **topologie**.



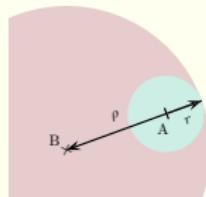
II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Proposition 1 :

- ➊ Toute boule ouverte est un ouvert.

$$❶ \quad r = \frac{\rho - AB}{2}.$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

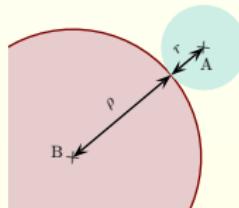
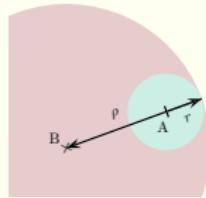
2. Ouverts

Proposition 1 :

- ① Toute boule ouverte est un ouvert.
- ② Le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
En particulier, $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ est un ouvert pour tout $A \in \mathbb{R}^2$.

$$\textcircled{1} \quad r = \frac{\rho - AB}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad r = \frac{AB - \rho}{2}.$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

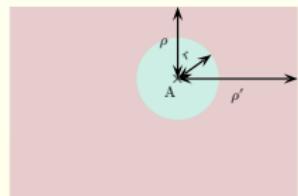
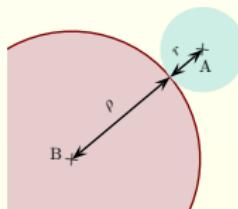
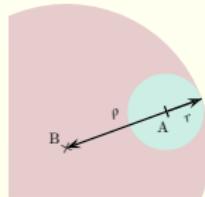
Proposition 1 :

- ① Toute boule ouverte est un ouvert.
- ② Le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
En particulier, $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ est un ouvert pour tout $A \in \mathbb{R}^2$.
- ③ Tout produit de deux intervalles ouverts est un ouvert.

$$\textcircled{1} \quad r = \frac{\rho - AB}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad r = \frac{AB - \rho}{2}.$$

$$\textcircled{3} \quad r = \min \{\rho, \rho'\}$$



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Remarques :

- ❶ Soient $C \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. La boule fermée $\mathcal{B}_f = \{M \in \mathbb{R}^2, \|CM\| \leq r\}$ n'est pas un ouvert.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Remarques :

- ❶ Soient $C \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. La boule fermée $\mathcal{B}_f = \{M \in \mathbb{R}^2, \|CM\| \leq r\}$ n'est pas un ouvert.
- ❷ Il existe des parties ni ouvertes ni fermées comme $A = [0, 1[\times [0, 1[$.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de \mathbb{R}^2 sont-elles ouvertes ?

- 1 Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de \mathbb{R}^2 sont-elles ouvertes ?

- ① Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.
- ② Une boule ouverte.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de \mathbb{R}^2 sont-elles ouvertes ?

- ① Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.
- ② Une boule ouverte.
- ③ Une droite.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de \mathbb{R}^2 sont-elles ouvertes ?

- ① Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.
- ② Une boule ouverte.
- ③ Une droite.
- ④ L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$.



II. Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

2. Ouverts

Exercice 3 (Topologie) :

Les parties suivantes de \mathbb{R}^2 sont-elles ouvertes ?

- ① Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.
- ② Une boule ouverte.
- ③ Une droite.
- ④ L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$.
- ⑤ \mathbb{Z}^2 .



III. Continuité

- 1 Approche graphique
- 2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2
- 3 Continuité
 - Limite
 - Continuité
- 4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}
- 5 Gradient
- 6 Dérivées partielles et composées
- 7 Extrema



III. Continuité

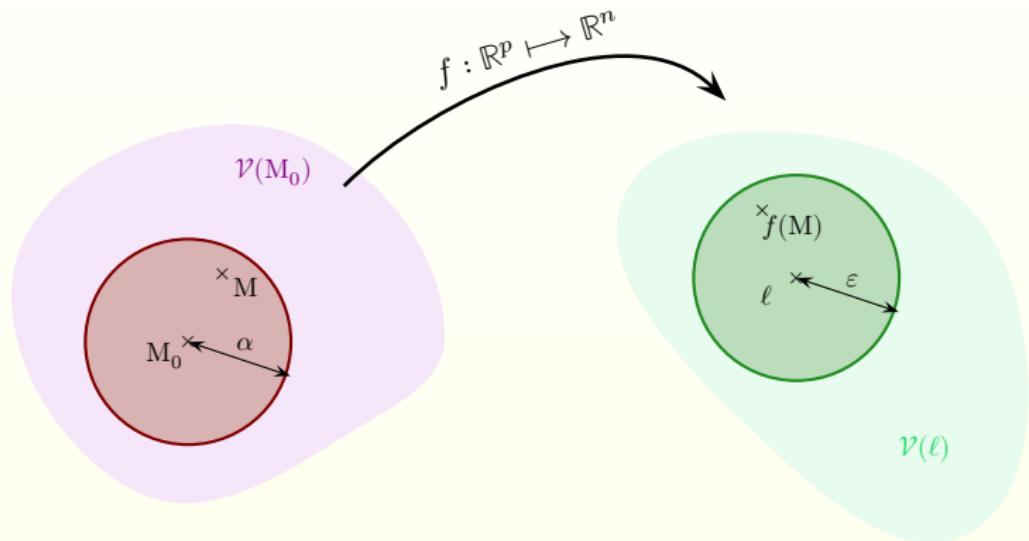


Figure 36 – Cas général d'une fonction définie sur \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R}^n .



III. Continuité

1. Limite

Définition 1 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$



III. Continuité

1. Limite

Définition 1 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0M < \alpha \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon.$



III. Continuité

1. Limite

Définition 1 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0 M < \alpha \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall V_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell), \exists V_{M_0} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0), \forall M \in \Omega \cap V_{M_0}, f(M) \in V_\ell.$



III. Continuité

1. Limite

Définition 1 (Limite (finie) en un point) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite ℓ en M_0 si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0M < \alpha \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall V_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell), \exists V_{M_0} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0), \forall M \in \Omega \cap V_{M_0}, f(M) \in V_\ell.$

On note alors $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \ell$ ou $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell.$



III. Continuité

1. Limite

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont conservés :

- unicité de la limite,



III. Continuité

1. Limite

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,



III. Continuité

1. Limite

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}),



III. Continuité

1. Limite

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}),
- compatibilité/ou pas avec les inégalités larges/strictes,



III. Continuité

1. Limite

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}),
- compatibilité/ou pas avec les inégalités larges/strictes,
- théorème d'encadrement, ...



III. Continuité

1. Limite

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont conservés :

- unicité de la limite,
- caractère localement borné,
- opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}),
- compatibilité/ou pas avec les inégalités larges/strictes,
- théorème d'encadrement, ...

Remarque : On aurait pu définir aussi des limites de valeurs $+\infty$ ou $-\infty$, mais nous n'en aurons pas dans ce chapitre.



III. Continuité

1. Limite

Faire tendre $M = (x; y)$ vers $A = (x_0; y_0)$ ne revient pas à faire tendre x vers x_0 puis y vers y_0 ou le contraire.

ATTENTION

Le point M peut se rapprocher de A de bien des manières, il n'est pas obligé d'y aller en ligne droite selon \vec{i} ou \vec{j} et c'est bien là le problème !

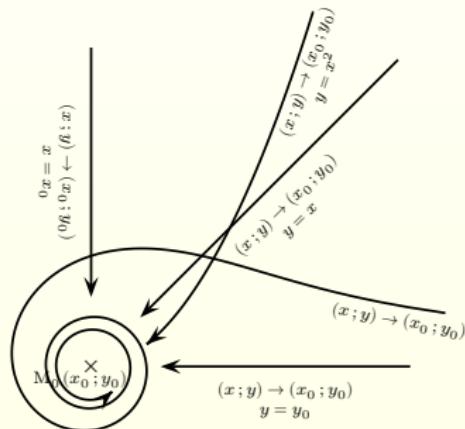


Figure 37 – Différentes manières de tendre vers un point dans \mathbb{R}^2 .



III. Continuité

1. Limite

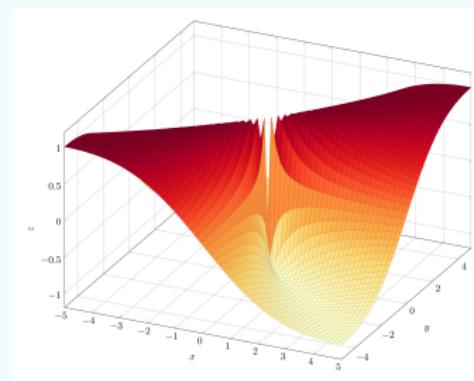
Exemple 6 :

Considérons la fonction définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x; y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Il est clair que :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$



Mais nous allons voir que f N'a PAS de limite en $(0;0)$. Cela se visualise assez bien, mais cela se montre aussi assez bien en coordonnées polaires $(r; \theta)$.



III. Continuité

1. Limite

Exemple 6 :

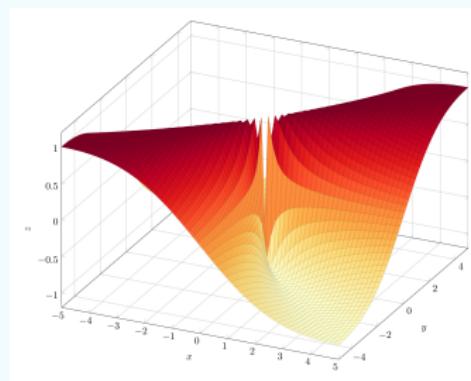
Considérons la fonction définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x; y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Il est clair que :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

et



Mais nous allons voir que f N'a PAS de limite en $(0;0)$. Cela se visualise assez bien, mais cela se montre aussi assez bien en coordonnées polaires $(r; \theta)$.



III. Continuité

1. Limite

Exemple b :

Considérons la fonction définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x; y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

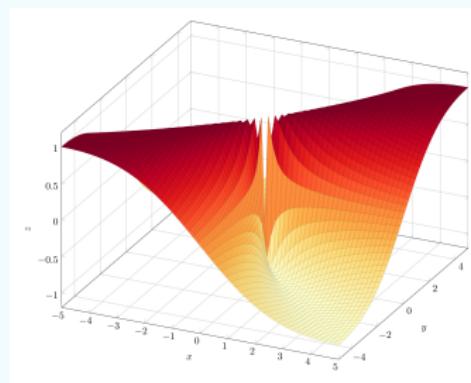
Il est clair que :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

et

$$\bullet \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Mais nous allons voir que f N'a PAS de limite en $(0;0)$. Cela se visualise assez bien, mais cela se montre aussi assez bien en coordonnées polaires $(r; \theta)$.



III. Continuité

1. Limite

Exemple 6 :

On sait que tout point $M(x; y)$ de \mathbb{R}^2 peut être écrit sous la forme $(r \cos \theta; r \sin \theta)$ pour un certain $(r; \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dit couple de coordonnées polaires de M .

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ de coordonnées polaires $(r; \theta)$, on a :

$$f(x; y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2r \cos(\theta) \times 2r \sin(\theta)}{r^2} = \sin(2\theta), \text{ donc } f \text{ ne dépend que de la variable } \theta.$$



III. Continuité

1. Limite

Exemple 6 :

On sait que tout point $M(x; y)$ de \mathbb{R}^2 peut être écrit sous la forme $(r \cos \theta; r \sin \theta)$ pour un certain $(r; \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dit couple de coordonnées polaires de M .

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ de coordonnées polaires $(r; \theta)$, on a :

$$f(x; y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2r \cos(\theta) \times 2r \sin(\theta)}{r^2} = \sin(2\theta), \text{ donc } f \text{ ne dépend que de la variable } \theta.$$

Par conséquent, si $(x; y)$ tend vers $(0; 0)$ en maintenant constant l'angle θ , $(x; y)$ tend vers le réel $\sin(2\theta)$ pour ce θ fixé.

On obtient ainsi des limites différentes selon la manière dont on fait tendre $(x; y)$ vers $(0; 0)$, donc f ne peut avoir de limite en $(0; 0)$.



III. Continuité

1. Limite

Exercice 4 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ et que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.



III. Continuité

1. Limite

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers x_0 et y_0 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = \ell$.



III. Continuité

1. Limite

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers x_0 et y_0 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = \ell$.

Comme dans le cas des fonctions à une variable, on se sert surtout de la contraposée de la première implication *i.e.* si on peut trouver deux couples de suites (x_n, y_n) et (x'_n, y'_n) ayant les même limites mais pour lesquelles $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n, y'_n)$ alors f ne peut avoir de limite au point considéré ou encore moins être continue (*confer* paragraphe (2)).



III. Continuité

1. Limite

Exemple 7 :

Reprendons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'exemple (6).

$$(x; y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = 1.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}; 0\right) = 0 \neq 1.$

Ici aussi, la fonction f ne peut avoir de limite en $(0,0)$.



III. Continuité

2. Continuité

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ i.e. si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.



III. Continuité

2. Continuité

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ i.e. si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0 M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.



III. Continuité

2. Continuité

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ i.e. si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0 M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall V_{f(M_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(M_0)), \exists U_V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0), \forall M \in \Omega \cap U_V, f(M) \in V_{f(M_0)}$.



III. Continuité

2. Continuité

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ i.e. si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0 M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall V_{f(M_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(M_0)), \exists U_V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0), \forall M \in \Omega \cap U_V, f(M) \in V_{f(M_0)}$.

On dit que f est continue sur Ω lorsqu'elle est continue en tout point de Ω .

On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.



III. Continuité

2. Continuité

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ i.e. si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0 M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall V_{f(M_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(M_0)), \exists U_V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0), \forall M \in \Omega \cap U_V, f(M) \in V_{f(M_0)}$.

On dit que f est continue sur Ω lorsqu'elle est continue en tout point de Ω .

On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

On notera aussi, suivant le point de vue, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.



III. Continuité

2. Continuité

Définition 8 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ i.e. si :

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall M \in \Omega, M_0 M < \alpha \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.
- $\forall V_{f(M_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(M_0)), \exists U_V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0), \forall M \in \Omega \cap U_V, f(M) \in V_{f(M_0)}$.

On dit que f est continue sur Ω lorsqu'elle est continue en tout point de Ω .

On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

On notera aussi, suivant le point de vue, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

En particulier, si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un ouvert contenant $f(\Omega)$ alors $\varphi \circ f$ est continue sur Ω .



III. Continuité

2. Continuité

Ici aussi, pour montrer qu'une fonction de deux variables $(x ; y) \mapsto f(x ; y)$ est continue en A $(x_0 ; y_0)$, il ne suffit pas de montrer que les fonctions d'UNE variable $x \mapsto f(x ; y_0)$ et $y \mapsto f(x_0 ; y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0 .

ATTENTION



III. Continuité

2. Continuité

Ici aussi, pour montrer qu'une fonction de deux variables $(x ; y) \mapsto f(x ; y)$ est continue en A $(x_0 ; y_0)$, il ne suffit pas de montrer que les fonctions d'UNE variable $x \mapsto f(x ; y_0)$ et $y \mapsto f(x_0 ; y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0 .

De nouveau, $(x ; y)$ peut s'approcher de A de bien des manières, il n'est pas obligé de le faire « à x fixé » ou « à y fixé ».

ATTENTION



III. Continuité

2. Continuité

Ici aussi, pour montrer qu'une fonction de deux variables $(x ; y) \mapsto f(x ; y)$ est continue en A $(x_0 ; y_0)$, il ne suffit pas de montrer que les fonctions d'UNE variable $x \mapsto f(x ; y_0)$ et $y \mapsto f(x_0 ; y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0 .

De nouveau, $(x ; y)$ peut s'approcher de A de bien des manières, il n'est pas obligé de le faire « à x fixé » ou « à y fixé ».

ATTENTION

Contre-Exemple 8 :

La fonction $(x ; y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ de l'[exemple \(6\)](#) précédent n'est pas prolongeable par continuité en $(0 ; 0)$, alors que fonctions $x \mapsto f(x ; 0)$ et $y \mapsto f(0 ; y)$, identiquement nulles, le sont en 0.



III. Continuité

2. Continuité

Exemples 9 :

- Les fonctions $(x; y) \mapsto x$ et $(x; y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur \mathbb{R}^2 .



III. Continuité

2. Continuité

Exemples 9 :

- Les fonctions $(x; y) \mapsto x$ et $(x; y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur \mathbb{R}^2 .

- La norme $\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$ est continue sur \mathbb{R}^2 .



III. Continuité

2. Continuité

Exemples 9 :

- Les fonctions $(x; y) \mapsto x$ et $(x; y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur \mathbb{R}^2 .

- La norme $\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

- Soient I et J deux intervalles, $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$.

Les fonctions $(x; y) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)$ et $(x; y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ sont continues sur $I \times J$.



III. Continuité

2. Continuité

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0) , alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)



III. Continuité

2. Continuité

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0) , alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)



III. Continuité

2. Continuité

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0) , alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)



III. Continuité

2. Continuité

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0) , alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)
- $|f|$ est continue en (x_0, y_0)



III. Continuité

2. Continuité

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0) , alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)
- $|f|$ est continue en (x_0, y_0)
- Si $g(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0)



III. Continuité

2. Continuité

En résumant,

Proposition 3 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0) , alors :

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)
- $|f|$ est continue en (x_0, y_0)
- Si $g(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0)

On retrouve que toute combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.



III. Continuité

2. Continuité

Exercice 5 :

Étudier la continuité $f : (x, y) \mapsto \sin(x + y)e^{-(x^2+y^2)}$.

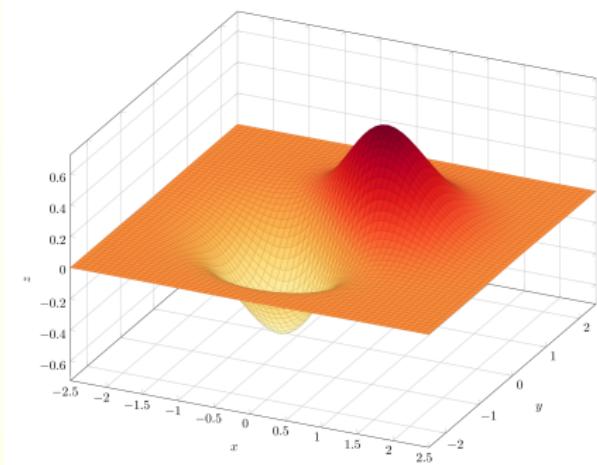


III. Continuité

2. Continuité

Exercice 5 :

Étudier la continuité $f : (x, y) \mapsto \sin(x + y)e^{-(x^2+y^2)}$.



III. Continuité

2. Continuité

Proposition 4 :

Si f est continue en (x_0, y_0) alors :

- $f_{y_0} : x \mapsto f(\cdot, y_0)$ est continue en x_0 ;



III. Continuité

2. Continuité

Proposition 4 :

Si f est continue en (x_0, y_0) alors :

- $f_{y_0} : x \mapsto f(\cdot, y_0)$ est continue en x_0 ;
- $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, \cdot)$ est continue en y_0 .



III. Continuité

2. Continuité

Proposition 4 :

Si f est continue en (x_0, y_0) alors :

- $f_{y_0} : x \mapsto f(\cdot, y_0)$ est continue en x_0 ;
- $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, \cdot)$ est continue en y_0 .

ATTENTION

La réciproque est fausse !

Il suffit de considérer encore la fonction

$f : (x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ de l' exemple (6) qui n'est pas

continue en $(0, 0)$ alors que ses deux applications partielles $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$, toutes deux identiquement nulles, le sont.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1 Approche graphique

2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

3 Continuité

4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

- Dérivées partielles
- Fonctions de classe \mathcal{C}^1
- Développement limité à l'ordre 1

5 Gradient

6 Dérivées partielles et composées

7 Extrema



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Définition 9 (Dérivée directionnelle) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, $A(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{v}(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que f est dérivable en A dans la direction \vec{v} si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} \text{ existe et est finie.}$$

Le cas échéant, on appelle dérivée de f en A dans la direction \vec{v} ce réel noté $D_{\vec{v}}f(A)$.

Dire que f est dérivable en A dans la direction \vec{v} revient à dire que la fonction $F : t \mapsto f(A + t\vec{v})$ est dérivable en 0 et on a alors :

$$D_{\vec{v}}f(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{v}) - f(A)}{t} = F'(0).$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

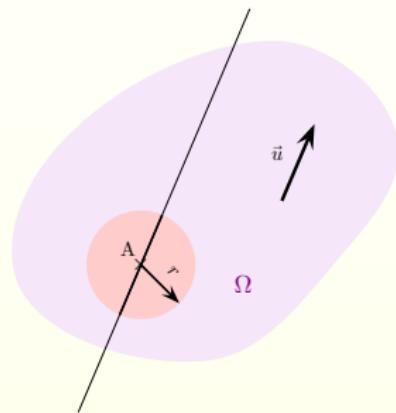


Figure 38 – Droite de \mathbb{R}^2 passant par A et de vecteur directeur \vec{v} . On parle de **droite affine**.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Remarques :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction $t \mapsto f(A + t\vec{v}) = f(A)$ est définie et constante sur \mathbb{R} tout entier, donc dérivable en 0 avec $D_{\vec{0}}f(A) = 0$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Remarques :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction $t \mapsto f(A + t\vec{v}) = f(A)$ est définie et constante sur \mathbb{R} tout entier, donc dérivable en 0 avec $D_{\vec{0}}f(A) = 0$.
- Pour \vec{v} non nul, la définition précédente n'a de sens que parce que la fonction $t \mapsto f(A + t\vec{v})$ est définie au voisinage de 0. Cela découle du caractère ouvert de Ω , qui contient $B(A, r)$ pour un certain $r > 0$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Remarques :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction $t \mapsto f(\mathbf{A} + t\vec{v}) = f(\mathbf{A})$ est définie et constante sur \mathbb{R} tout entier, donc dérivable en 0 avec $D_{\vec{0}}f(\mathbf{A}) = 0$.
- Pour \vec{v} non nul, la définition précédente n'a de sens que parce que la fonction $t \mapsto f(\mathbf{A} + t\vec{v})$ est définie au voisinage de 0. Cela découle du caractère ouvert de Ω , qui contient $B(\mathbf{A}, r)$ pour un certain $r > 0$.

Posons en effet $\alpha = \frac{r}{\|\vec{v}\|}$. Pour tout $t \in]-a ; a[$, on :

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{A} + t\vec{v}) = \|t\vec{v}\| = |t| \times \|\vec{v}\| < \alpha \|\vec{v}\| = r \implies \mathbf{A} + t\vec{v} \in B(\mathbf{A}, r) \subset \Omega.$$

La fonction $t \mapsto f(\mathbf{A} + t\vec{v})$ est ainsi définie sur $] -a ; a [$.



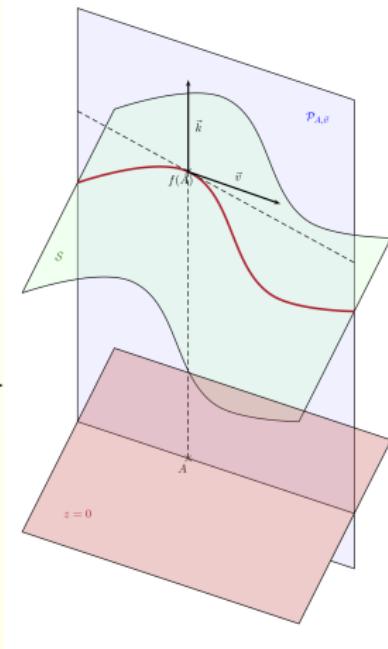
IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Que représente géométriquement la dérivée de f en A dans la direction \vec{v} ?

- ❶ Considérez dans \mathbb{R}^3 le graphe \mathcal{S} de f :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x; y) \in \Omega \text{ et } z = f(x; y) \right\}$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

- ❷ Coupez-le sans ménagement par le plan « vertical » $\mathcal{P}_{A,\vec{v}}$ passant par A dirigé par les deux vecteurs orthogonaux \vec{v} et \vec{k} .

En toute rigueur, \vec{v} appartient à \mathbb{R}^2 , mais nous avons identifié \mathbb{R}^2 au plan d'équation $z = 0$ de \mathbb{R}^3 .

L'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{A,\vec{v}}$ est une courbe \mathcal{C} du plan $\mathcal{P}_{A,\vec{v}}$.

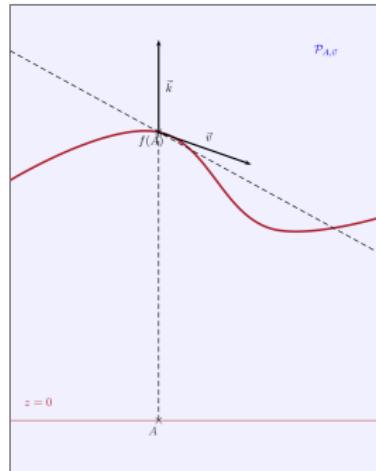
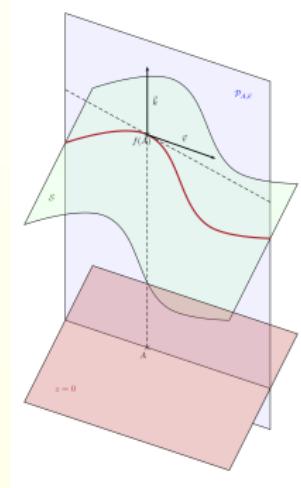


Figure 39 – Dérivée d'une fonction suivant une direction.



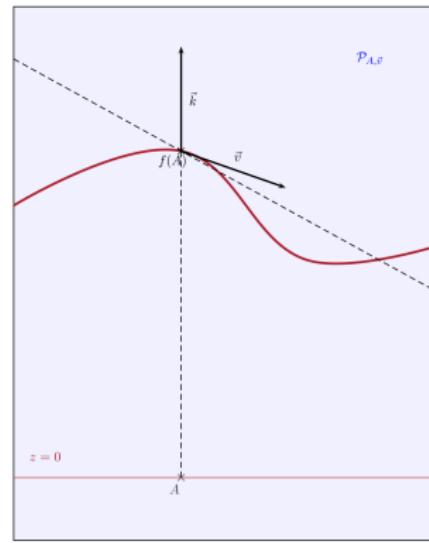
IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

- ❸ Oubliez désormais le reste de l'espace et concentrez-vous sur $\mathcal{P}_{A,\vec{v}}$ et \mathcal{C} .

Munissez $\mathcal{P}_{A,\vec{v}}$ du repère (A, \vec{v}, \vec{k}) . La courbe \mathcal{C} n'est alors rien de plus que le graphe de la fonction $t \mapsto f(A + t\vec{v})$ et, s'il existe, $D_{\vec{v}}f(A)$ est son nombre dérivé en 0 dans la base (\vec{v}, \vec{k}) i.e. la pente de sa tangente en 0.

Notez bien ici que \vec{v} n'est pas forcément unitaire, il faut en tenir compte quand on se représente la pente.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

La définition suivante n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Définition 10 (Dérivées partielles) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

- S'il existe, le réel $D_{\bar{i}} f(A)$ est appelé **dérivé partiel par rapport à x de f en $A(x_0, y_0)$** .

On le note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_x f(A)$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

La définition suivante n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Définition 10 (Dérivées partielles) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

- S'il existe, le réel $D_i f(A)$ est appelé **dérivé partiel par rapport à x de f en $A(x_0, y_0)$** .

On le note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_x f(A)$.

- S'il existe, le réel $D_j f(A)$ est appelé **dérivé partiel par rapport à y de f en $A(x_0, y_0)$** .

On le note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_y f(A)$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Une fonction f d'une seule variable possède une seule dérivée f' quand elle est dérivable. Il arrive qu'on note $\frac{df}{dx}$ cette dérivée.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Une fonction f d'une seule variable possède une seule dérivée f' quand elle est dérivable. Il arrive qu'on note $\frac{df}{dx}$ cette dérivée.

ATTENTION

Pour une fonction d'une seule variable, la notation $\frac{df}{dx}$ s'écrit avec des « d »droits. Pour une fonction de deux variables, les notations $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'écrivent au contraire avec des « d »ronds. C'est comme ça ...

Par ailleurs, quand on évalue $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x; y)$, le résultat se note $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y)$ et non $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

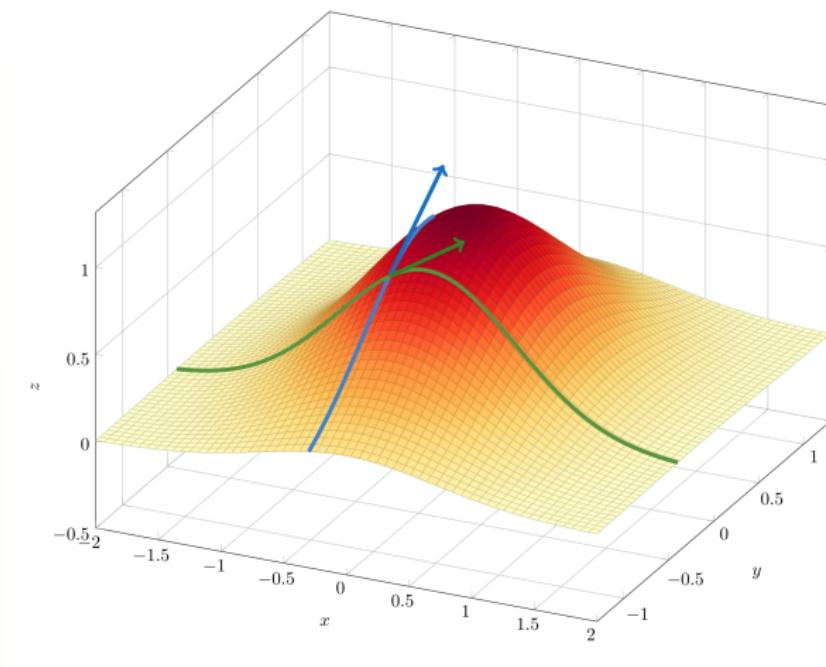


Figure 40 – Dérivée partielle suivant les vecteurs de base.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Le calcul concret des dérivées partielles est très facile.

En effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} D_{\vec{i}} f(A) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{i}) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t; y_0) - f(x_0; y_0)}{t} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{x_0, y_0}_A) = f'_{y_0}(x_0). \end{aligned}$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ revient à fixer y à la valeur y_0 dans $f(x; y)$ et à dériver par rapport à x au sens usuel.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Le calcul concret des dérivées partielles est très facile.

En effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} D_{\vec{i}} f(A) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{i}) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t; y_0) - f(x_0; y_0)}{t} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{x_0, y_0}_A) = f'_{y_0}(x_0). \end{aligned}$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ revient à fixer y à la valeur y_0 dans $f(x; y)$ et à dériver par rapport à x au sens usuel.

Pour la même raison, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dérivant $f(x; y)$ par rapport à y à x fixé en x_0 :

$$\begin{aligned} D_{\vec{j}} f(A) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{j}) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + t) - f(x_0; y_0)}{t} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{x_0, y_0}_A) = f'_{x_0}(y_0). \end{aligned}$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Exemple 10 :

La fonction $(x; y) \mapsto e^{xy^2}$ possède des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 et,

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = y^2 e^{xy^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 2xy e^{xy^2}.$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Exemple 10 :

La fonction $(x; y) \mapsto e^{xy^2}$ possède des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 et,

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = y^2 e^{xy^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 2xy e^{xy^2}.$$

L'existence des deux dérivées partielles de f n'entraîne pas la continuité de f .

Contre-Exemple II :

ATTENTION

Considérer encore la fonction de l' exemple (6) :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Théorème 5 (Opérations sur les dérivées partielles) :

Combinaison linéaire, produit, inverse : Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si f et g possèdent des dérivées partielles sur Ω , il en est de même de toute combinaison linéaire de f et g et du produit fg , mais aussi de l'inverse $\frac{1}{f}$ si f ne s'annule pas.

En outre, pour tous $k \in \{x, y\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\partial_k f(\lambda f + g) = \lambda \partial_k f + \partial_k g, \quad \partial_k(fg) = g \partial_k f + f \partial_k g \quad \text{et} \quad \partial_k \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{\partial_k f}{f^2}.$$

Composition : Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , I un intervalle, $f : \Omega \mapsto I$ et $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(\Omega) \subset I$.

Si f possède des dérivées partielles sur Ω et si φ est dérivable sur I , alors $\varphi \circ f$ possède des dérivées partielles sur Ω et, pour tout $k \in \{x, y\}$:

$$\partial_k(\varphi \circ f) = \partial_k f \times \varphi' \circ f.$$

IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Exercice 6 :

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 \sin(xy)$.

- ❶ Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1. Dérivées partielles

Exercice 6 :

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 \sin(xy)$.

- ❶ Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- ❷ On note $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$.
Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Un commentaire ?



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Définition II :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 si ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω .

On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Méthode I :

Pour qu'une fonction f , à deux variables, soit de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω , il suffira donc :

- ❶ de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de \mathbb{R}^2 .



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Méthode I :

Pour qu'une fonction f , à deux variables, soit de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω , il suffira donc :

- ❶ de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- ❷ montrer que, à y fixé, la fonction (à une variable) $x \mapsto f(x; y)$ est dérivable sur un ouvert I_y tel que $I_y \times \{y\} \subset \Omega$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Méthode I :

Pour qu'une fonction f , à deux variables, soit de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω , il suffira donc :

- ❶ de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- ❷ montrer que, à y fixé, la fonction (à une variable) $x \mapsto f(x; y)$ est dérivable sur un ouvert I_y tel que $I_y \times \{y\} \subset \Omega$.
- ❸ montrer que, à x fixé, la fonction (à une variable) $y \mapsto f(x; y)$ est dérivable sur un ouvert I_x tel que $\{x\} \times I_x \subset \Omega$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Méthode I :

Pour qu'une fonction f , à deux variables, soit de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω , il suffira donc :

- ① de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- ② montrer que, à y fixé, la fonction (à une variable) $x \mapsto f(x; y)$ est dérivable sur un ouvert I_y tel que $I_y \times \{y\} \subset \Omega$.
- ③ montrer que, à x fixé, la fonction (à une variable) $y \mapsto f(x; y)$ est dérivable sur un ouvert I_x tel que $\{x\} \times I_x \subset \Omega$.
- ④ les fonctions (à deux variables) $(x; y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x; y)$ et $(x; y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x; y)$ sont continues sur Ω .



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Exemples 12 :

- Les fonctions $(x; y) \mapsto x$ et $(x; y) \mapsto y$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Exemples 12 :

- Les fonctions $(x; y) \mapsto x$ et $(x; y) \mapsto y$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

- La norme $\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$ est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$!



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 est de classe \mathcal{C}^1 .



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 est de classe \mathcal{C}^1 .
- L'inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui ne s'annule pas aussi.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 est de classe \mathcal{C}^1 .
- L'inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui ne s'annule pas aussi.
- Enfin, pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et tout intervalle I , la composée $\varphi \circ f$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f(\Omega) \subset I$ et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 est de classe \mathcal{C}^1 .
- L'inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui ne s'annule pas aussi.
- Enfin, pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et tout intervalle I , la composée $\varphi \circ f$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f(\Omega) \subset I$ et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

Remarque : Il peut sembler curieux qu'on dispose d'une notion de continuité et d'une notion de classe \mathcal{C}^1 , mais pas d'une notion intermédiaire de dérivabilité. Le chaînon manquant s'appelle la **différentiabilité** et ne figure pas au programme de PTSI.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Exercice 1 :

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

❶ $(x; y) \mapsto \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{si } (x; y) = (0; 0) \end{cases}$ sur \mathbb{R}^2 .



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Exercice 1 :

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

$$\textcircled{1} \quad (x; y) \mapsto \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{si } (x; y) = (0; 0) \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

$$\textcircled{2} \quad (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{si } (x; y) = (0; 0) \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Théorème 1 (Formule de Taylor-Young) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

La fonction f admet en tout point (x_0, y_0) de Ω un développement limité d'ordre 1 donné par :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\text{o}} (\|(h_1; h_2)\|).$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Remarques :

- À rapprocher du DL₁ d'une fonction réelle

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Remarques :

- À rapprocher du DL₁ d'une fonction réelle

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

- La condition $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in \Omega$ est vérifiée dès que $\|(h_1; h_2)\|$ car Ω est ouvert.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Remarques :

- À rapprocher du DL₁ d'une fonction réelle

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

- La condition $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in \Omega$ est vérifiée dès que $\|(h_1; h_2)\|$ car Ω est ouvert.
- $\underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{o}(\|(h_1; h_2)\|)$ désigne une fonction négligeable devant $\|(h_1; h_2)\|$
i.e. qui peut s'écrire sous la forme $\|(h_1; h_2)\| \varepsilon(h_1; h_2)$ avec
$$\lim_{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h_1; h_2) = 0.$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Remarques :

- À rapprocher du DL₁ d'une fonction réelle

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + \underset{h \rightarrow 0}{\text{o}}(h).$$

- La condition $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in \Omega$ est vérifiée dès que $\|(h_1; h_2)\|$ car Ω est ouvert.
- $\underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\text{o}}(\|(h_1; h_2)\|)$ désigne une fonction négligeable devant $\|(h_1; h_2)\|$
i.e. qui peut s'écrire sous la forme $\|(h_1; h_2)\| \varepsilon(h_1; h_2)$ avec
$$\lim_{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h_1; h_2) = 0.$$
- On remarquera que l'application

$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (h_1; h_2) &\mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

est linéaire. On l'appellera la **différentielle de f** en A $(x_0; y_0)$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

- En posant $(x; y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ alors $(h_1; h_2) = (x - x_0, y - y_0)$ et la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\text{o}} (\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

- En posant $(x; y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ alors $(h_1; h_2) = (x - x_0, y - y_0)$ et la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0, 0)}{\text{o}}(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

- La formule de Taylor-Young montre que pour $\|(x - x_0, y - y_0)\|$ assez petit, l'accroissement $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ peut-être approché « au premier ordre » par l'expression linéaire :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

On écrit :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \simeq (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

au voisinage de (x_0, y_0) .



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Corollaire I :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Toute fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω y est continue.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Exercice 8 :

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y + xy$.

- ➊ Calculer $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$.



IV. Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

3. Développement limité à l'ordre 1

Exercice 8 :

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y + xy$.

- ❶ Calculer $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$.
- ❷ Reconnaître les différents termes du DL₁ de f en (x_0, y_0) .



V. Gradient

- 1 Approche graphique
- 2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2

- 3 Continuité
- 4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

5 Gradient

- Vecteur gradient
- Plan tangent

- 6 Dérivées partielles et composées
- 7 Extrema



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Reprenez le développement de Taylor-Young du **théorème (7)** :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\text{o}} (\|(h_1; h_2)\|).$$



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Reprendons le développement de Taylor-Young du **théorème (7)** :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\overset{\text{o}}{\circ}} (\|(h_1; h_2)\|).$$

Définition 12 (Gradient) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f possède des dérivées partielles en A , on appelle **gradient de f en A** le vecteur de \mathbb{R}^2 , noté $\vec{\text{grad}}f(A)$ ou $\vec{\nabla}f(A)$, défini par :

$$\vec{\nabla}f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A); \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right) \iff \vec{\nabla}f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Reprendons le développement de Taylor-Young du **théorème (7)** :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\text{o}} (\|(h_1; h_2)\|).$$

Définition 12 (Gradient) :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f possède des dérivées partielles en A , on appelle **gradient de f en A** le vecteur de \mathbb{R}^2 , noté $\vec{\nabla} f(A)$ ou $\vec{\nabla} f(A)$, défini par :

$$\vec{\nabla} f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A); \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right) \iff \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Remarques : $\vec{\nabla} f$ se lit « nabla f » et c'est donc une application (vectorielle certes !) de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2 .



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
 $\forall h(h_1; h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a + h) = f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + o(h) .$$
$$\qquad\qquad\qquad h \rightarrow (0,0)$$



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
 $\forall h (h_1 ; h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a + h) = f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + o(h) .$$
$$\qquad\qquad\qquad h \rightarrow (0,0)$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les Gradients) :

- $\vec{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$.



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
 $\forall h (h_1 ; h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a + h) = f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + o(h) .$$
$$\qquad\qquad\qquad h \rightarrow (0,0)$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les Gradients) :

- $\vec{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$.
- $\vec{\nabla}(f \times g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g$.



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
 $\forall h (h_1 ; h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a + h) = f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + o(h) .$$
$$\qquad\qquad\qquad h \rightarrow (0,0)$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les Gradients) :

- $\vec{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g.$
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} \vec{\nabla} f.$
- $\vec{\nabla}(f \times g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g.$



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 2 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $a(x_0, y_0) \in \Omega$.
 $\forall h (h_1 ; h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a + h) = f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + o(h) \underset{h \rightarrow (0,0)}{.}$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les Gradients) :

- $\vec{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g.$
- $\vec{\nabla}(f \times g) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g.$
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} \vec{\nabla} f.$
- $\vec{\nabla}(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \times \vec{\nabla} f.$



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Théorème 9 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ non nul de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Théorème 9 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ non nul de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

En particulier,

- Le développement de Taylor-Young peut donc aussi s'écrire :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \partial_{(h_1; h_2)} f(x_0, y_0) + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\text{o}} (\|(h_1; h_2)\|).$$



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Théorème 9 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ non nul de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

En particulier,

- Le développement de Taylor-Young peut donc aussi s'écrire :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \partial_{(h_1; h_2)} f(x_0, y_0) + \underset{(h_1; h_2) \rightarrow (0,0)}{\text{o}} (\|(h_1; h_2)\|).$$

- Le théorème (9) garantit l'existence de dérivées dans toutes les directions que l'on peut calculer facilement à partir des dérivées partielles ou du gradient.



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Par définition, une fonction de deux variables est de classe \mathcal{C}^1 quand elle possède des dérivées continues dans les deux directions privilégiées \vec{i} et \vec{j} .



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Par définition, une fonction de deux variables est de classe \mathcal{C}^1 quand elle possède des dérivées continues dans les deux directions privilégiées \vec{i} et \vec{j} .

Remarque : Si on pose $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$, on retrouve :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = 1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \partial_{\vec{j}} f(x_0, y_0) = 0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

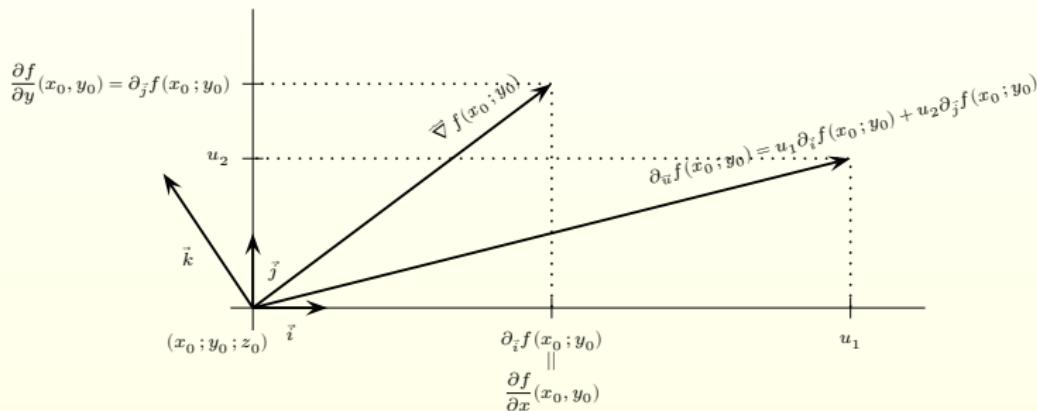


Figure 41 – Dérivée suivant un vecteur.



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Pour une fonction f d'une seule variable, vous savez depuis longtemps que le réel $f'(a)$ est la pente de la tangente de f en a .



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Pour une fonction f d'une seule variable, vous savez depuis longtemps que le réel $f'(a)$ est la pente de la tangente de f en a .

Pour vous le faire comprendre, on vous a sans doute dit que « quand on avance de 1 vers la droite en abscisse, on monte de $f'(a)$ en ordonnée sur la tangente ».



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Pour une fonction f d'une seule variable, vous savez depuis longtemps que le réel $f'(a)$ est la pente de la tangente de f en a .

Pour vous le faire comprendre, on vous a sans doute dit que « quand on avance de 1 vers la droite en abscisse, on monte de $f'(a)$ en ordonnée sur la tangente ».

La situation est la même pour une fonction f de deux variables. Au voisinage de $A(x_0, y_0)$, le graphe de f a l'allure de son plan tangent et $D_{\vec{u}}f(A)$ n'est jamais que la pente de ce plan dans la direction \vec{v} .

Le **théorème (9)** énonce que quand on avance de u_1 dans la direction \vec{i} et de u_2 dans la direction \vec{j} , on monte de $u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(A) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(A)$ dans la direction \vec{k} sur le plan tangent.



V. Gradient

1. Vecteur gradient

Exercice 9 :

Soit $f : (x ; y) \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - x - \cos(y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x ; y) \neq (0 ; 0) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x ; y) = (0 ; 0) \end{cases}$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0 ; 0)$ puis déterminer $\vec{\nabla} f(0 ; 0)$.



V. Gradient

2. Plan tangent

Pour les fonctions de la variable réelle, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I , pour tout $x_0 \in I$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Lorsqu'on écrit $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0 , on approche ainsi localement la fonction f par la fonction affine

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On va étendre cette idée aux fonctions de deux variables :



V. Gradient

2. Plan tangent

Pour les fonctions de la variable réelle, si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I , pour tout $x_0 \in I$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Lorsqu'on écrit $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0 , on approche ainsi localement la fonction f par la fonction affine

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On va étendre cette idée aux fonctions de deux variables :

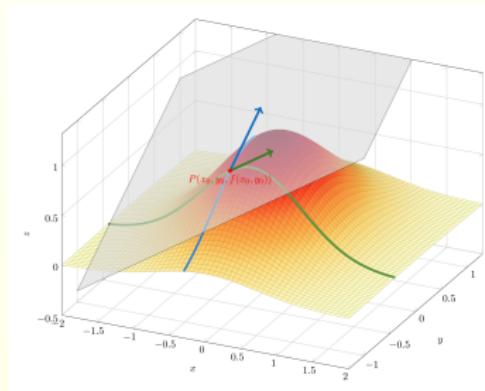


Figure 42 – Plan tangent à $z = e^{-(x^2+y^2)}$ en $M(x_0, y_0)$.



V. Gradient

2. Plan tangent

Théorème 10 :

On munit l'espace \mathbb{R}^3 d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Le plan tangent à la surface \mathcal{S} d'équation $z = f(x, y)$ au point $M(x_0; y_0; z_0)$ où $z_0 = f(x_0; y_0)$ a pour équation :

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \iff z - z_0 = \vec{\nabla} f(x_0; y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$



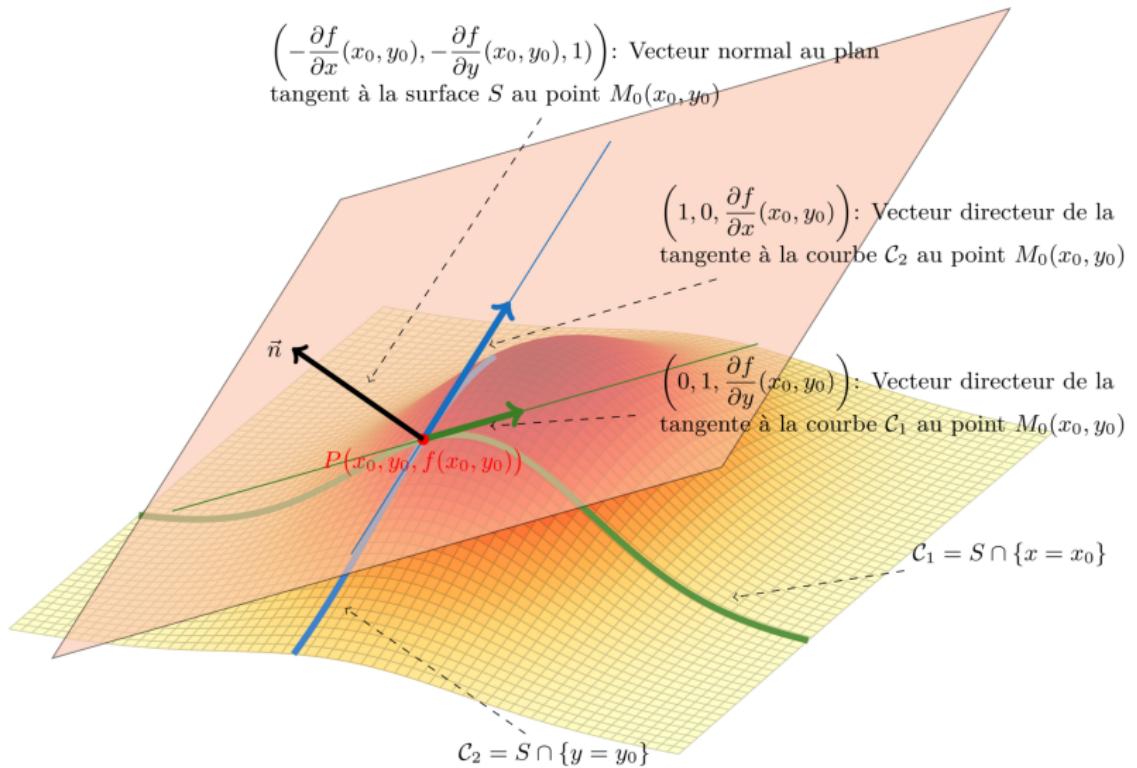


Figure 43 – Plan tangent à une surface.



V. Gradient

2. Plan tangent

Remarque : Résultat à rapprocher de l'équation de la tangente :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx}(x_0).$$

Nous savons depuis longtemps qu'une courbe suffisamment régulière ressemble localement à une droite. Sans surprise, toute surface suffisamment régulière ressemble localement à un plan.



V. Gradient

2. Plan tangent

Remarque : Résultat à rapprocher de l'équation de la tangente :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx}(x_0).$$

Nous savons depuis longtemps qu'une courbe suffisamment régulière ressemble localement à une droite. Sans surprise, toute surface suffisamment régulière ressemble localement à un plan.

Pour une fonction φ d'une seule variable, l'équation de la tangente en a est donnée par :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(a).$$

La situation est finalement la même pour les fonctions de deux variables.



V. Gradient

2. Plan tangent

Exercice 10 :

Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

- ❶ $(x; y) \mapsto x^2 + y + xy$ en $(0; 0)$.



V. Gradient

2. Plan tangent

Exercice 10 :

Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

- ❶ $(x; y) \mapsto x^2 + y + xy$ en $(0; 0)$.
- ❷ $(x; y) \mapsto xy e^{\cos(x)}$ en $(0; 0)$.



VI. Dérivées partielles et composées

- 1 Approche graphique
- 2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2
- 3 Continuité
- 4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}
- 5 Gradient
- 6 Dérivées partielles et composées
 - Notion d'arc
 - Règle de la chaîne
 - Interprétation graphique du gradient
- 7 Extrema



VI. Dérivées partielles et composées

1. Notion d'arc

Définition B :

On appelle arc paramétrisé γ une fonction de \mathbb{R} (ou d'une partie de \mathbb{R}) dans \mathbb{R}^2 .

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

On peut facilement se représenter un arc en cinématique : $\gamma(t)$ représentant la position d'un mobile au temps t dans le plan \mathbb{R}^2 .

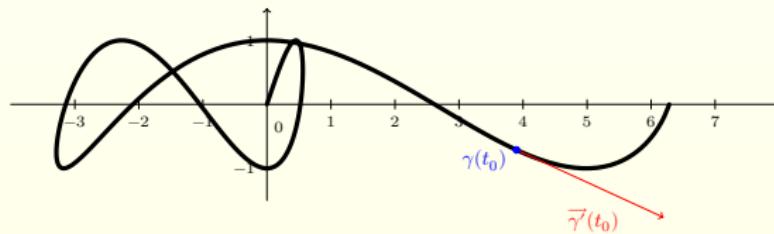


Figure 44 – Trajectoire de $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ sur $[0 ; 2\pi]$.



VI. Dérivées partielles et composées

1. Notion d'arc

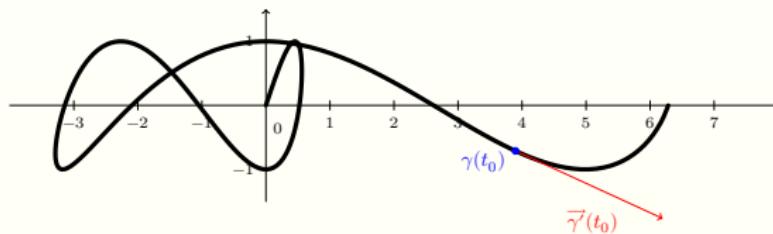


Figure 45 – Trajectoire de $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ sur $[0 ; 2\pi]$.

La fonction γ est de classe \mathcal{C}^1 si, et seulement si x et y sont de classe \mathcal{C}^1 et on définit alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Dans l'interprétation cinématique, $\gamma'(t)$ représente la vitesse du mobile au temps t ou plutôt le vecteur vitesse instantané que l'on note habituellement $\vec{\gamma}'(t)$ laissant $\gamma(t)$ sans flèche pour rappeler leur vocation respective de vecteur vitesse et de vecteur position.



VI. Dérivées partielles et composées

1. Notion d'arc

Exercice II :

Représenter l'arc défini par $\gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

Déterminer γ' .



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

On va composer un arc par une fonction de deux variables :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$t \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad f(x(t), y(t))$$

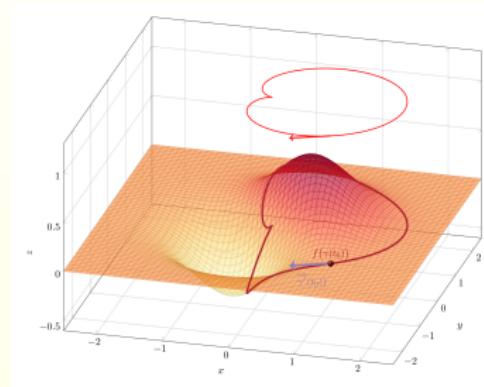


Figure 46 – Cardioïde d'équation $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t)(1 + \cos(t)) \\ \sin(t)(1 + \cos(t)) \end{pmatrix}$ tracée sur la surface $f : (x; y) \mapsto (x + y) e^{-(x^2 + y^2)}$.



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

La fonction obtenue est une fonction réelle $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Est-elle dérivable ? Et quelle est sa dérivée ?



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

La fonction obtenue est une fonction réelle $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Est-elle dérivable ? Et quelle est sa dérivée ?

Théorème II (Règle de la chaîne) :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 .

On considère $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $\gamma(I) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \gamma$ soit bien définie.

Si γ et f sont de classe \mathcal{C}^1 , respectivement sur I et Ω alors $f \circ \gamma$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= \vec{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)}.\end{aligned}$$



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

Remarques :

- Écriture à rapprocher de $(f \circ \varphi)' = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t))$.



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

Remarques :

- Écriture à rapprocher de $(f \circ \varphi)' = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t))$.
- À la manière des physiciens mais abusivement pour nous, on retient souvent la règle de la chaîne sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

Remarques :

- Écriture à rapprocher de $(f \circ \varphi)' = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t))$.
- À la manière des physiciens mais abusivement pour nous, on retient souvent la règle de la chaîne sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

- La relation $(f \circ \gamma)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = D_{\gamma'(t)}f(\gamma(t))$ montre que $(f \circ \gamma)'(t)$ est une dérivée directionnelle de f , en l'occurrence la dérivée de f en $\gamma(t)$ dans la direction $\overrightarrow{\gamma'(t)}$.



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

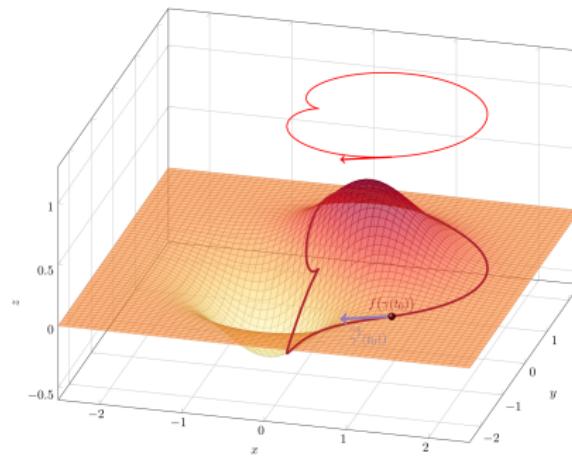


Figure 47 – Cardioïde tracée sur une surface.

- La figure (47) illustre le phénomène. Le mobile γ évolue dans le plan \mathbb{R}^2 , mais on peut s'intéresser à sa projection verticale sur le graphe de f .



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

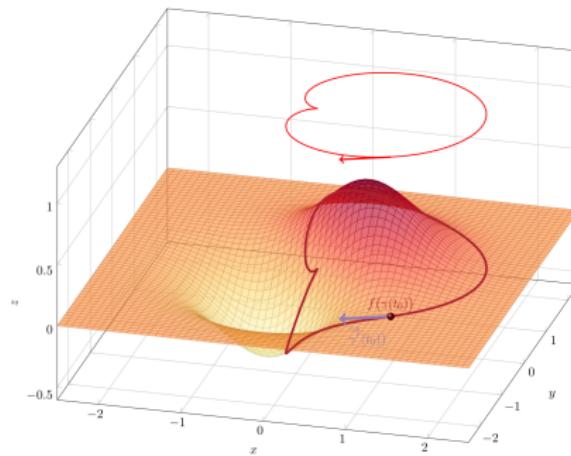


Figure 47 – Cardioïde tracée sur une surface.

- La figure (47) illustre le phénomène. Le mobile γ évolue dans le plan \mathbb{R}^2 , mais on peut s'intéresser à sa projection verticale sur le graphe de f . Le résultat est un nouvel arc paramétré, à trois dimensions cette fois et entièrement contenu dans le graphe de f .



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

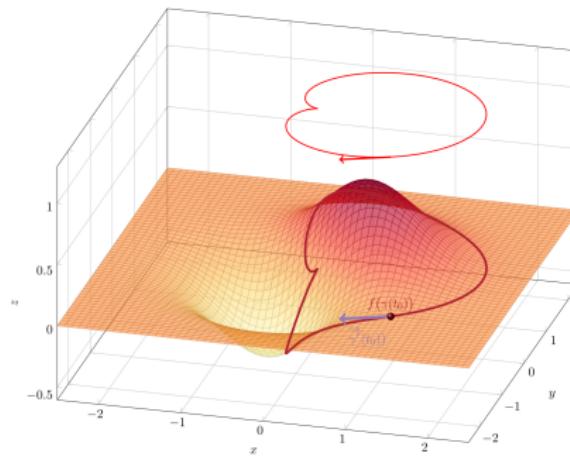


Figure 47 – Cardioïde tracée sur une surface.

- La [figure \(47\)](#) illustre le phénomène. Le mobile γ évolue dans le plan \mathbb{R}^2 , mais on peut s'intéresser à sa projection verticale sur le graphe de f .

Le résultat est un nouvel arc paramétré, à trois dimensions cette fois et entièrement contenu dans le graphe de f .

Sur la [figure \(47\)](#), la pente de la droite en pointillé dans le repère $(\overrightarrow{\gamma(t)}, \overrightarrow{\gamma'(t)}, \vec{k})$ vaut à la fois $(f \circ \gamma)'(t)$ et $D_{\gamma'(t)}f(\gamma(t))$.



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

Théorème 12 :

Soient D un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\phi, \psi : D \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur D .

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

Soit $\Gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\Gamma(D) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \Gamma$
 $(u, v) \mapsto (\phi(u, v), \psi(u, v))$

soit bien définie.

Alors $F = f \circ \Gamma$ est de classe \mathcal{C}^1 sur D et on a :

$$F : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$(u, v) \quad (\phi(u, v), \psi(u, v)) \quad f(\phi(u, v), \psi(u, v))$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(u, v)) \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(u, v)) \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v). \end{cases}$$

VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

Remarque : On peut à nouveau retenir simplement [1] :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

en travaillant à la physicienne, et en notant :

$$(u, v) \mapsto (\underbrace{\phi(u, v)}_x, \underbrace{\psi(u, v)}_y) \mapsto f(\phi(u, v), \psi(u, v))$$

[1]. abusivement !



VI. Dérivées partielles et composées

2. Règle de la chaîne

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x, y) = f(x + y), \quad h(x, y) = f(x^2 + y^2), \quad k(x, y) = f(xy).$$



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

Proposition B :

On se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé du plan.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Soient $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que $\gamma(I) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \gamma$ soit bien définie.

Si $f \circ \gamma$ est une ligne de niveau alors la dérivée de γ est orthogonale au gradient de f en tout point de celle-ci :

$$\forall t \in I, f(\gamma(t)) = k \in \mathbb{R} \implies \vec{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0.$$



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

Les lignes de niveau sont orthogonales au gradient.

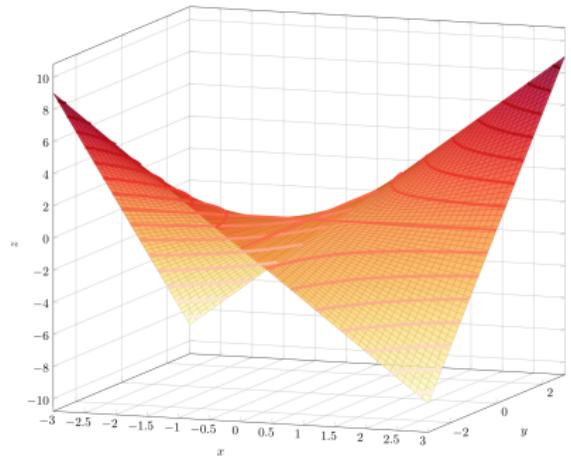
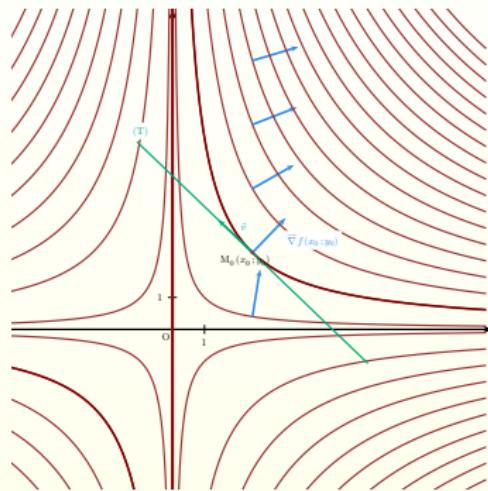


Figure 48 – Lignes de niveau k de la surface $z = xy$.

La ligne de niveau passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $xy = k$ où $k = x_0 y_0$.

En ce point M_0 est dessiné un vecteur tangent \vec{v} et la tangente à la ligne de niveau.

Le vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau en ce point.



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

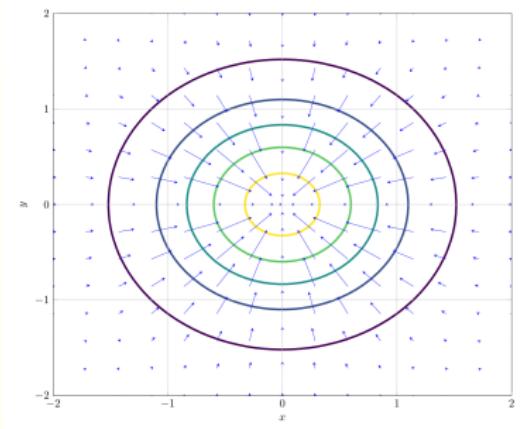
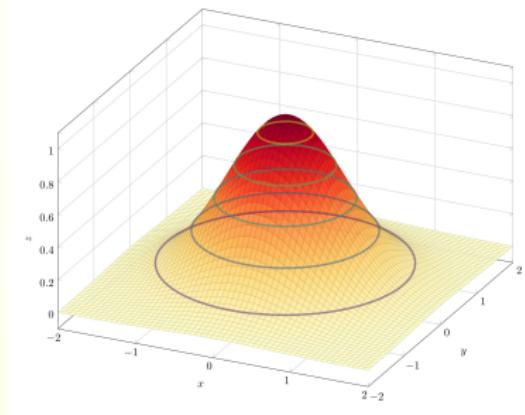


Figure 49 – Graphe de $f : (x ; y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$, son champ de gradients et quelques lignes de niveaux.



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

En physique, on retiendra que les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

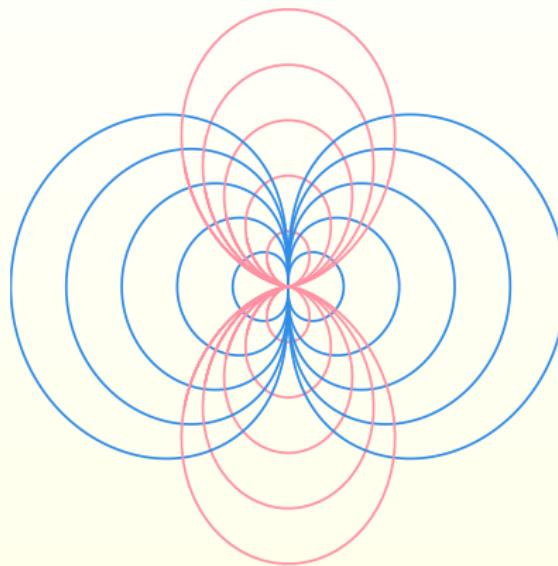


Figure 50 –

On appelle **ligne de champ**, un arc paramétré qui est tangent en chacun de ses points au **gradient** de f représenté ici en bleu.

Ici est représenté le **Potentiel** créé par un dipôle électrostatique en un point de l'espace ainsi que ses **lignes de champ**.



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

Théorème 14 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Parmi tous les arcs paramétrés γ de classe \mathcal{C}^1 passant par (x_0, y_0) , i.e. $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, avec $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, la valeur de $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est :

- maximale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de même sens ;



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

Théorème 14 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Parmi tous les arcs paramétrés γ de classe \mathcal{C}^1 passant par (x_0, y_0) , i.e. $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, avec $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, la valeur de $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est :

- maximale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de même sens ;
- minimale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de sens contraire.



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

Théorème 14 :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Parmi tous les arcs paramétrés γ de classe \mathcal{C}^1 passant par (x_0, y_0) , i.e. $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, avec $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, la valeur de $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est :

- maximale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de même sens ;
- minimale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de sens contraire.

Interprétation graphique : $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ représente donc la direction de la ligne de plus grande pente sur la surface d'équation $z = f(x, y)$, et il est orienté vers les valeurs les plus élevées.



VI. Dérivées partielles et composées

3. Interprétation graphique du gradient

Autrement dit, si l'on veut passer le plus vite possible du niveau k au niveau $k' < k$, à partir du point donné $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ de niveau $f(x, y) = k$, alors il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$. [2]

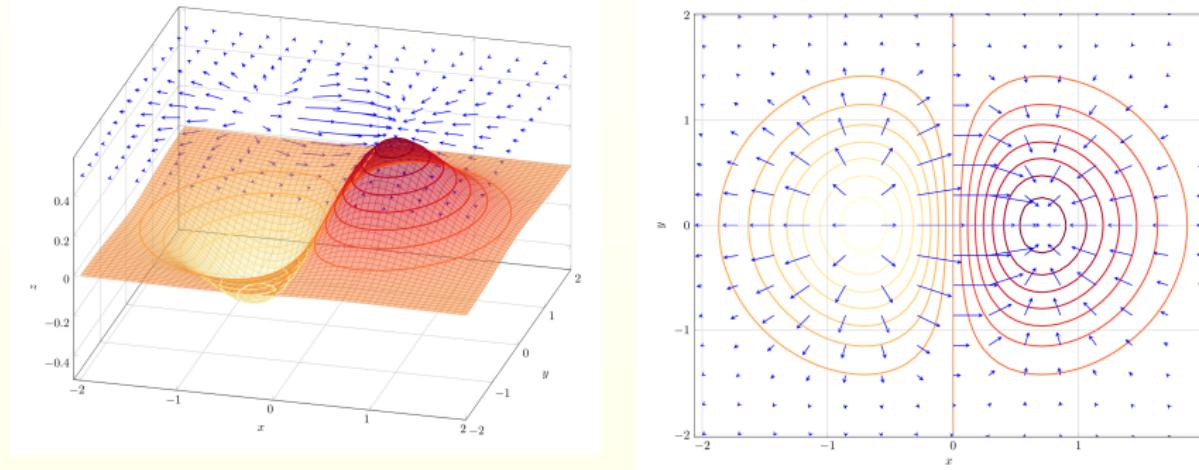


Figure 51 – Lignes de niveau et champ de gradients de $f : (x; y) \mapsto x e^{-(x^2+y^2)}$.

[2]. Un skieur voulant aller vite choisit la plus forte pente descendante en un point de la montagne, c'est la direction inverse du gradient.



VII. Extrema

- 1 Approche graphique
- 2 Rudiments de topologie dans \mathbb{R}^2
- 3 Continuité
- 4 Différentiabilité de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}
- 5 Gradient
- 6 Dérivées partielles et composées
- 7 Extrema



VII. Extrema

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω .

- On dit que f présente un **maximum global** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

VII. Extrema

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω .

- On dit que f présente un **maximum global** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- On dit que f présente un **minimum global** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

VII. Extrema

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω .

- On dit que f présente un **maximum global** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- On dit que f présente un **minimum global** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

- On dit que f présente un **maximum local** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \|(x ; y) - (x_0 ; y_0)\| < \alpha \implies f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

VII. Extrema

Définition 14 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω .

- On dit que f présente un **maximum global** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- On dit que f présente un **minimum global** en (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

- On dit que f présente un **maximum local** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \|(x ; y) - (x_0 ; y_0)\| < \alpha \implies f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- On dit que f présente un **minimum local** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \|(x ; y) - (x_0 ; y_0)\| < \alpha \implies f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

VII. Extrema

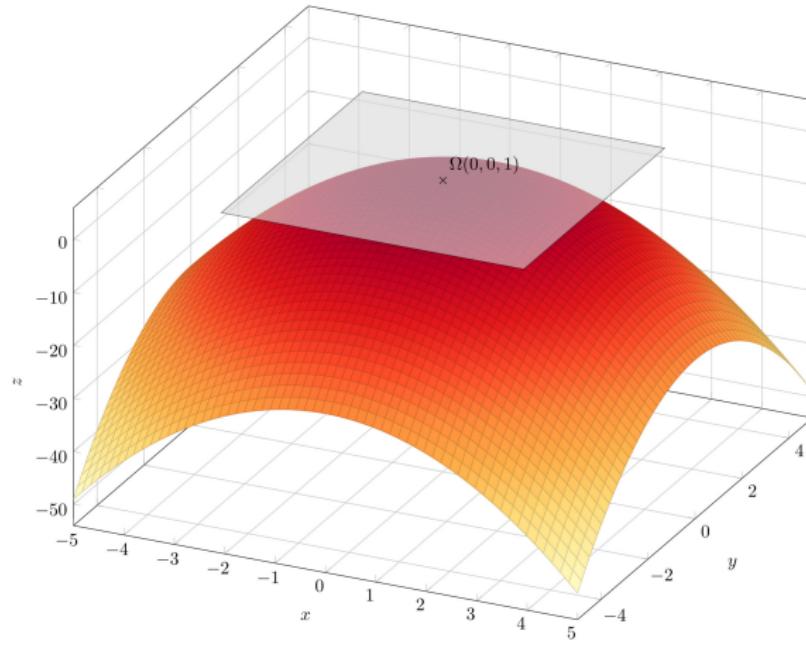


Figure 52 — $\Omega(0;0;1)$ est un maximum local de $(x;y) \mapsto 1 - (x^2 + y^2)$.



VII. Extrema

Remarques :

- Un extremum local est donc un extremum global sur un ouvert contenu dans Ω . Un extremum global est un extremum local. un extremum local peut être un extremum global.



VII. Extrema

Remarques :

- Un extremum local est donc un extremum global sur un ouvert contenu dans Ω . Un extremum global est un extremum local. un extremum local peut être un extremum global.
- Rien ne dit que les extrema locaux ou globaux sont uniques.

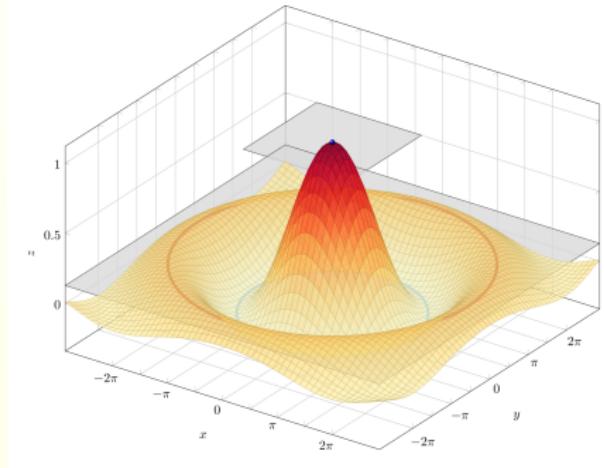


Figure 53 – La fonction $S : (x ; y) \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ admet un **maximum** global unique ainsi qu'une infinité de **maxima** locaux et de **minima** locaux.



VII. Extrema

Exercice B :

Déterminer les points critiques de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto 2x^2 + xy + y^2 - 3x + 1.$$



VII. Extrema

Proposition 15 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $A(x_0, y_0) \in \Omega$ alors :

Si f présente un extremum local en $A(x_0, y_0)$, alors :

- l'application partielle $f(\cdot, y_0)$ présente un extremum local en x_0



VII. Extrema

Proposition 15 :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $A(x_0, y_0) \in \Omega$ alors :

Si f présente un extremum local en $A(x_0, y_0)$, alors :

- l'application partielle $f(\cdot, y_0)$ présente un extremum local en x_0
- l'application partielle $f(x_0, \cdot)$ présente un extremum local en y_0

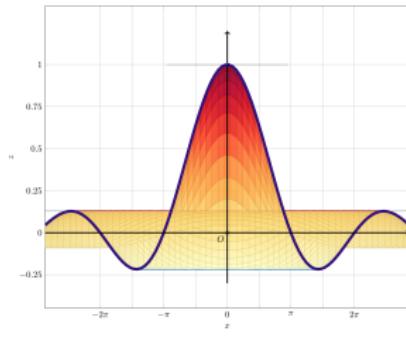


Figure 54 – L'application partielle $S_{y=0} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet des extrema en les abscisses de ceux de S .



VII. Extrema

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple (13).

Contre-Exemple B :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $A(0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Alors $f_{A,x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_{A,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x^2 \quad (x, y) \mapsto -y^2$$

- La fonction $f_{A,x}$ admet un minimum local en 0.



VII. Extrema

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple (13).

Contre-Exemple B :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $A(0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Alors $f_{A,x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_{A,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x^2 \quad (x, y) \mapsto -y^2$$

- La fonction $f_{A,x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{A,y}$ admet un maximum local en 0.



VII. Extrema

Contre-Exemple B :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $A(0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Alors $f_{A,x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_{A,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x^2 \quad (x, y) \mapsto -y^2$$

- La fonction $f_{A,x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{A,y}$ admet un maximum local en 0.

Supposons alors, par exemple, que f admette un minimum local en $(0, 0)$ alors il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall xy \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| < r \implies f(x, y) \geq f(0, 0) \text{ avec } f(0, 0) = 0.$$

VII. Extrema

Contre-Exemple B :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $A(0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Alors $f_{A,x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_{A,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x^2 \quad (x, y) \mapsto -y^2$$

- La fonction $f_{A,x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{A,y}$ admet un maximum local en 0.

Supposons alors, par exemple, que f admette un minimum local en $(0, 0)$ alors il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall xy \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| < r \implies f(x, y) \geq f(0, 0) \text{ avec } f(0, 0) = 0.$$

Or, en prenant $(x, y) = \left(0; \frac{r}{2}\right)$ alors $\|(x, y)\| < \frac{r}{2} < r$ et $f(x, y) = -\frac{r^2}{4} < 0$ qui est une contradiction.

VII. Extrema

Contre-Exemple B :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et A(0, 0).

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Alors $f_{A,x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_{A,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x^2 \quad (x, y) \mapsto -y^2$$

- La fonction $f_{A,x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{A,y}$ admet un maximum local en 0.

Supposons alors, par exemple, que f admette un minimum local en (0, 0) alors il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall xy \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| < r \implies f(x, y) \geq f(0, 0) \text{ avec } f(0, 0) = 0.$$

Or, en prenant $(x, y) = \left(0 ; \frac{r}{2}\right)$ alors $\|(x, y)\| < \frac{r}{2} < r$ et $f(x, y) = -\frac{r^2}{4} < 0$ qui est une contradiction.

Donc f n'admet pas d'extremum local en (0, 0). On dit que A est un **point col**.

VII. Extrema

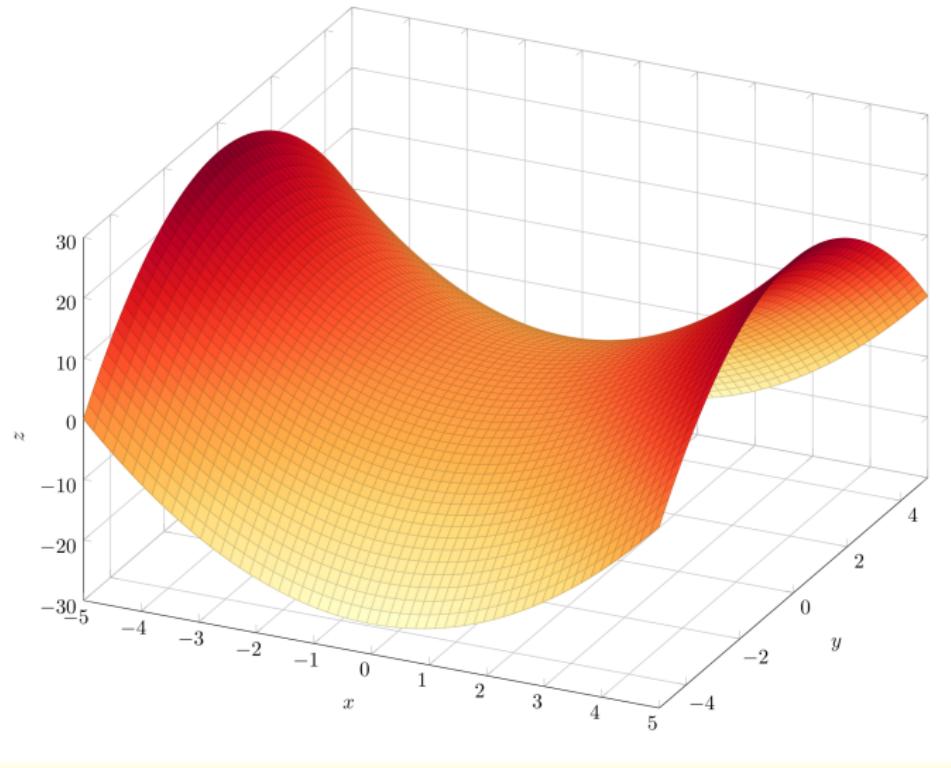


Figure 55 – La surface de la fonction $(x ; y) \mapsto x^2 - y^2$ présente un point col en $(0, 0)$



VII. Extrema

Exercice 14 :

Soit $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

- ❶ Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : x \mapsto f(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0.



VII. Extrema

Exercice 14 :

Soit $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

- ❶ Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : x \mapsto f(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0.
- ❷ f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$? On pourra étudier $f(x, 2x^2 - x^3)$



VII. Extrema

Définition 15 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et (x_0, y_0) un point de Ω .

On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f lorsque :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$



VII. Extrema

Définition 15 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et (x_0, y_0) un point de Ω .

On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f lorsque :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Remarque : En un point critique, le plan tangent à la surface est parallèle à $z = 0$.



VII. Extrema

Définition 15 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et (x_0, y_0) un point de Ω .

On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f lorsque :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Remarque : En un point critique, le plan tangent à la surface est parallèle à $z = 0$.

Théorème 16 :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Si f présente en $(x_0, y_0) \in \Omega$ un extremum local alors (x_0, y_0) est un point critique de f .

VII. Extrema

Remarques :

- Attention aux hypothèses du théorème : f est de classe \mathcal{C}^1 et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
À rapprocher du théorème équivalent pour les fonctions réelles : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ présente un extremum en a , si f est dérivable en a et a n'est pas au bord de I , alors $f'(a) = 0$.



VII. Extrema

Remarques :

- Attention aux hypothèses du théorème : f est de classe \mathcal{C}^1 et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
À rapprocher du théorème équivalent pour les fonctions réelles : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ présente un extremum en a , si f est dérivable en a et a n'est pas au bord de I , alors $f'(a) = 0$.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire comme pour les fonctions réelles. f peut ne pas présenter d'extremum en un point critique : Pensez au point-col de l' [exemple \(14\)](#) !
Ce théorème dit juste que les extrema seront nécessairement à chercher parmi les points critiques de f .



VII. Extrema

Remarques :

- Attention aux hypothèses du théorème : f est de classe \mathcal{C}^1 et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
À rapprocher du théorème équivalent pour les fonctions réelles : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ présente un extremum en a , si f est dérivable en a et a n'est pas au bord de I , alors $f'(a) = 0$.
- C'est une condition suffisante, mais non nécessaire comme pour les fonctions réelles. f peut ne pas présenter d'extremum en un point critique : Pensez au point-col de l'[exemple \(14\)](#) !
Ce théorème dit juste que les extrema seront nécessairement à chercher parmi les points critiques de f .
- Si (x_0, y_0) est un point critique de f alors $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.
Donc pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, la dérivée de f suivant le vecteur \vec{u} est nulle.
En effet,

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Par contraposition, si on trouve un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \neq 0$ alors (x_0, y_0) n'est pas un point critique de f , et donc f ne présente pas d'extremum en (x_0, y_0) .



VII. Extrema

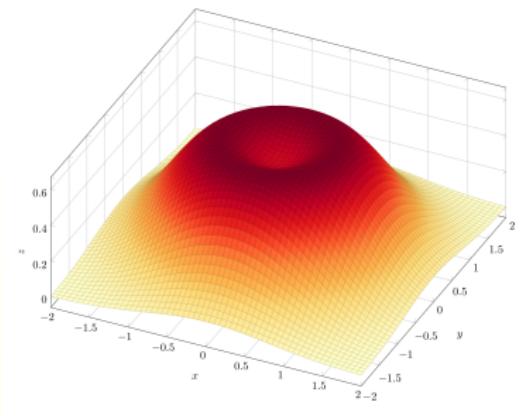


Figure 56 – Minimum local non global

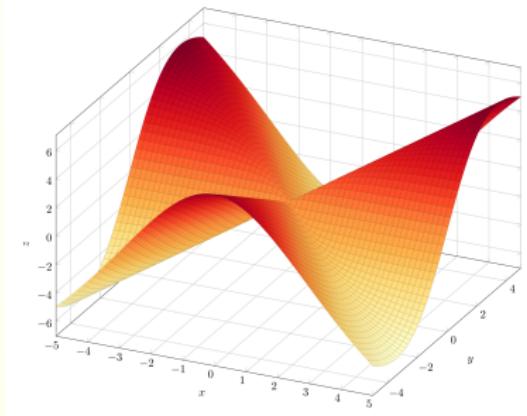


Figure 57 – Point critique non extrémal



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Cherchons un extremum de f . Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert, si f admet un extremum en M_0 , le point M_0 sera un point critique de f .



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Cherchons un extremum de f . Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert, si f admet un extremum en M_0 , le point M_0 sera un point critique de f .

Or, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \end{cases}.$$



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Cherchons un extremum de f . Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert, si f admet un extremum en M_0 , le point M_0 sera un point critique de f .

Or, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).\end{aligned}$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur \mathbb{R}^2 donc le seul candidat pour accueillir un extremum.



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).\end{aligned}$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur \mathbb{R}^2 donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$.



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).\end{aligned}$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur \mathbb{R}^2 donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$.
- $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de minimum en $(0, 0)$.



VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur \mathbb{R}^2 donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$.
- $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de minimum en $(0, 0)$.

On a vu que $(0, 0)$ est un point col de f .

VII. Extrema

Exemple 14 :

On considère encore $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).\end{aligned}$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur \mathbb{R}^2 donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$.
- $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de minimum en $(0, 0)$.

On a vu que $(0, 0)$ est un point col de f .

Finalement, f n'admet pas d'extremum local.

VII. Extrema

Méthode 2 :

Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω . L'étude des points extrémaux est simple :

- ❶ Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.



VII. Extrema

Méthode 2 :

Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω . L'étude des points extrémaux est simple :

- ① Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- ② Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer ses dérivées partielles.



VII. Extrema

Méthode 2 :

Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω . L'étude des points extrémaux est simple :

- ① Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- ② Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer ses dérivées partielles.
- ③ Chercher les points critiques de f . Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.



VII. Extrema

Méthode 2 :

Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω . L'étude des points extrémaux est simple :

- ① Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- ② Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer ses dérivées partielles.
- ③ Chercher les points critiques de f . Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.
- ④ Pour chaque point critique (x_0, y_0) , étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, au voisinage de (x_0, y_0) pour savoir si c'est un extremum local, puis globalement le cas échéant.



VII. Extrema

Méthode 2 :

Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω . L'étude des points extrémaux est simple :

- ① Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- ② Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer ses dérivées partielles.
- ③ Chercher les points critiques de f . Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.
- ④ Pour chaque point critique (x_0, y_0) , étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, au voisinage de (x_0, y_0) pour savoir si c'est un extremum local, puis globalement le cas échéant.

La dernière étape se fait manuellement, pensez aux identités remarquables !
L'année prochaine vous verrez de nouveaux outils pour systématiser cette étape.



VII. Extrema

Exercice 15 :

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

❶ $(x ; y) \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2.$

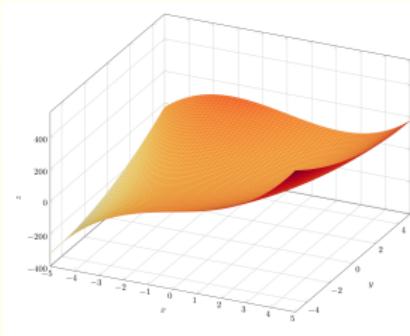


VII. Extrema

Exercice 15 :

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $(x ; y) \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2.$



1



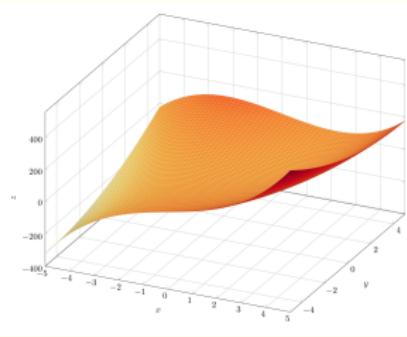
VII. Extrema

Exercice 15 :

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

① $(x ; y) \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2.$

② $(x ; y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2.$



①



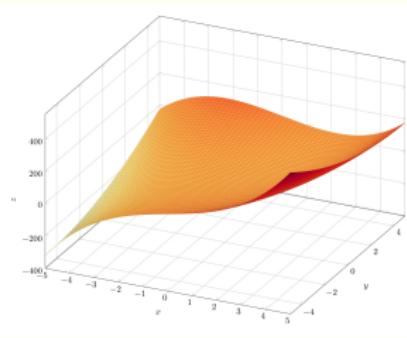
VII. Extrema

Exercice 15 :

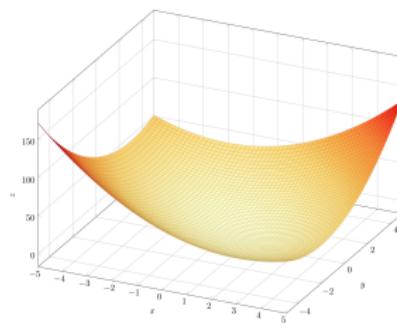
Étudier les extrema des fonctions suivantes :

① $(x ; y) \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2.$

② $(x ; y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2.$



①



②

