Fonctions de deux variables

I/ Limites et continuité

Exercice 1 : Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

1. $f : (x\,;y) \longmapsto \ln(x+y-1)$.
2. $g : (x\,;y) \longmapsto \sqrt{4-x^2-y^2}$.
3. $h : (x\,;y) \longmapsto \dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}$.
4. $k : (x\,;y) \longmapsto \ln(1+x+y)$.
5. $l : (x\,;y) \longmapsto \exp\left(\dfrac{x+y}{x^2-y}\right)$.

Exercice 2 : Étudier l'existence des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$
5. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
8. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x+y+z}$;
11. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

Exercice 3 : Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $g : (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$.
2. $h : (x,y) \longmapsto \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $h(0,0)=1$.

II/ Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 4 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0.$$

1. Montrer que f est continue et que, quel que soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(x, y)$ existe en chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
2. La dérivée directionnelle $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(0, 0)$ est-elle linéaire en $\vec{v}$?

   Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(\vec{v}, \mathrm{D}_{\vec{v}} f(0, 0)) \in \mathbb{R}^3$, forment-elles un plan ?
3. Le vecteur $\vec{v}$ étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(x, y)$ en (x, y) ?

Exercice 5 : Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition D_f.

Calculer ensuite, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition :

1. $f : (x\,;y) \longmapsto x^2 + y + xy$.
2. $f : (x\,;y) \longmapsto x\cos(x^2 + y^2)$.
3. $f : (x, y) \longmapsto 2x^2 - 5xy + 3y^2$
4. $g : (x, y) \longmapsto xy^2 - 6\ln(xy + x^2) + 17$
5. $f(x, y) = x^2 \exp(xy)$,
6. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
7. $f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$,
8. $f(x, y, z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$.

Exercice 6 (*) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0, 0)$?

Exercice 7 : Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + y + xy$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. $(x\,;y) \longmapsto xy\,\mathrm{e}^{\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. $(x\,;y) \longmapsto x^y$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
5. $(x\,;y) \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(y)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

Exercice 8 : Soit $f : (x, y) \longmapsto \mathrm{e}^y \cos(xy)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}\,;1\right)$.

Exercice 9 : Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^2$. Déterminer $\overrightarrow{\nabla} f(1, 3)$.

En déduire l'ensemble des valeurs possibles de $\partial_{\vec{u}} f(1, 3)$ pour tout vecteur $\vec{u}$ unitaire.

Exercice 10 : Soit $f : (x\,;y) \longmapsto x^2 + y$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\vec{v}\,(1\,;1)$.

Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminer $\partial_{\vec{v}} f\,(x\,;y)$ pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11 : Soient $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u_\theta}(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Déterminer $\partial_{\overrightarrow{u_\theta}} f$.

Exercice 12 : Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = x\cos y + y \exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(0, 0)$.
3. Pour quelle(s) valeurs de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

III/ Plan tangent

Exercice 13 : Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^y$ en $(1\,;0)$.
2. $(x\,;y) \longmapsto \sin(x + 2y)$ en $(0\,;0)$.
3. $(x\,;y) \longmapsto x^2y + y^2$ en $(1\,;3)$.
4. $(x\,;y) \longmapsto -x^2 - y^2$ en $(0\,;0)$.

Exercice 14 : Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0, y_0, z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$;
2. $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$.

Exercice 15 : On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 7)$.

Sa réponse est
$$z = 4x^3(x - 2) - 2y(y - 3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Exercice 16 (Une ellipse) : Soit $(a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Déterminer l'équation de la tangente à un point de cette courbe.

Exercice 17 : Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$. Même question avec le plan $3x + 5y - 2z = 3$.

Exercice 18 : Soit C le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et C^+ le demi-cône où $z \geqslant 0$.

Pour un point quelconque M_0 de $\mathrm{C} \setminus \{(0,0,0)\}$, de coordonnées $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$, on note $\mathrm{P}_{\mathrm{M}_0}$ le plan tangent au cône C en M_0.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan $\mathrm{P}_{\mathrm{M}_0}$.
2. Montrer que l'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée de deux droites D_1 et D_2 et que l'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites D_1^+ et D_2^+.
3. Montrer que le plan tangent au cône C est le même en tout point de $\mathrm{D}_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ (respectivement en tout point de $\mathrm{D}_2 \setminus \{(0,0,0)\}$).

Exercice 19 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent $\mathrm{P}_{\mathrm{M}_0}$ au graphe G_f de f en un point quelconque M_0 de G_f.
2. Pour le point M_0 de coordonnées $(2,1,2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en M soit parallèle à $\mathrm{P}_{\mathrm{M}_0}$.

IV/ Composées

Exercice 20 : Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que $$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \qquad \text{(XXXIII.1)}$$

Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Calculer la dérivée première de $\phi : t \longmapsto f(t^2, t^3)$
2. Calculer les dérivées partielles de $g : (t,u) \longmapsto f(2t-u, 4t+3u)$.

3. Calculer les dérivées partielles de $h : (t, u) \longmapsto f(t^2 + 2u^2, e^{tu})$.

Exercice 22 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0) \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0)$.

Soient $g : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\setminus(0\,;0) \\ (r\,;\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta\,;r\sin\theta) \end{array}$ et $\mathrm{F} = f \circ g$.

1. Justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$.
2. Soit $(r\,;\theta) \in\ ]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}(r\,;\theta)$ et $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}(r\,;\theta)$ en fonction de f, r et θ.
   (b) En déduire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$ en fonction de F, r et θ.

V/ Extrema

Exercice 23 : Montrer que :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y$ ne peut avoir d'extremum local qu'au point $(1, 0)$.
2. $(x\,;y) \longmapsto (x-y)^2 + x^3$ ne possède aucun extremum local.

Exercice 24 : Déterminer les extrema de :

1. $(x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2$.
2. $(x, y) \longmapsto x^2 + y^3$.
3. $(x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$.
4. $(x, y) \longmapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$.
5. $(x, y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
6. $(x, y) \longmapsto x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.
7. $(x, y) \longmapsto x^2y + \ln(1+y^2)$.
8. $(x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Exercice 25 : Déterminer $\sup\limits_{(x,y)\in[-1,1]^2} (x^3 - xy + y^3)$.

Fonctions de deux variables

Exercice 26 (Extrait écrit ATS) : On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=\left(x^2+y^2-3\right)^2+4y^2-8$.

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z=g(x,y)=\left(x^2+y^2-3\right)^2+4y^2-8.$$

1. Comparer $g(x,y)$ avec $g(x,-y), g(-x,y), g(-x,-y)$. Déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de S.
2. Montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=4x\left(x^2+y^2-3\right)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.
4. Trouver tous les couples de réels solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x\left(x^2+y^2-3\right)=0 \\ 4y\left(x^2+y^2-1\right)=0 \end{cases}$$

5. En déduire que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.