Fonctions de deux variables

I/ Limites et continuité

Exercice 1 : Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

1. $f : (x\,;y) \longmapsto \ln(x+y-1)$.
2. $g : (x\,;y) \longmapsto \sqrt{4-x^2-y^2}$.
3. $h : (x\,;y) \longmapsto \dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}$.
4. $k : (x\,;y) \longmapsto \ln(1+x+y)$.
5. $l : (x\,;y) \longmapsto \exp\left(\dfrac{x+y}{x^2-y}\right)$.

Correction :

1. La fonction f est définie sur l'ensemble des couples $(x\,;y)$ vérifiant $x+y-1>0$, qui se trouve être le demi-plan supérieur ouvert délimité par la droite d'équation $y=1-x$.
2. La fonction g est définie à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^2$ privé des droites d'équation $y=0$ et $x=0$: les axes de coordonnées.

Exercice 2 : Étudier l'existence des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$
5. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$
8. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x+y+z}$;
11. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

Correction :

1. $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leqslant 1$ donc $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\leqslant y$ et $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2}=1\neq 0$ et $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln(x+e^y)=\ln 2$ d'où

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2.$$

Fonctions de deux variables

3. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x}{x^2+y^2}$ n'existe pas d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

4. $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y=z\neq 0}} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = \dfrac{2}{3}$ et $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq 0, y=z=0}} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = 0$.

   Il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$ n'existe pas.

5. Sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2} = \dfrac{1}{|x|}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro d'où $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ n'existe pas en tant que limite finie.

6. $\dfrac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = r(\cos\varphi+2\sin\varphi)^3$ d'où $\left|\dfrac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant 27r \implies \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = 0$ car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} r = 0$.

7. D'une part, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0, y=0}} \dfrac{x^4y}{x^2-y^2} = 0$.

   D'autre part, en posant $h(y) = x^2-y^2 \iff x^2 = h(y)+y^2$, un calcul immédiat donne
$$\frac{x^4y}{x^2-y^2} = \frac{y^5+2y^3h(y)+(h(y))^2y}{h(y)} = \frac{y^5}{h(y)} + 2y^3 + h(y)y.$$
   En prenant, $h(y) = y^6$, l'expression $\dfrac{x^4y}{x^2-y^2}$ tend donc vers $+\infty$ quand y tend vers zero d'où $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \dfrac{x^4y}{x^2-y^2}$ n'existe pas.

8. Le long de la demi-droite $x>0, y=0, z=0$, la limite existe et vaut zéro et le long de la demi-droite $x=y=z>0$ la limite existe et vaut $1/3$ d'où $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}} \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$ n'existe pas.

9. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2}} \dfrac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 1$ tandis que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \dfrac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$ n'existe pas.

10. Supposons $x+y+z\neq 0$.

    Alors :
$$\frac{xyz}{x+y+z} = \frac{xy(h(x,y)-x-y)}{h(x,y)} = xy - \frac{xy(x+y)}{h(x,y)}$$
    d'où, avec
$$h(x,y) = (x+y)^4,$$
    nous obtenons
$$\frac{xyz}{x+y+z} = xy - \frac{xy}{(x+y)^3}.$$
    Il s'ensuit que
$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z=(x+y)^4\\ x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$$
    n'existe pas, au moins en tant que limite finie.

D'autre part,

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+z\neq 0, y=0}} \frac{xyz}{x+y+z} = 0.$$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$ ne peut pas exister.

11. La limite

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq\pm y, z=0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{1}{x-y}$$

n'existe pas car $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x-x^2}} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas. Par conséquent,

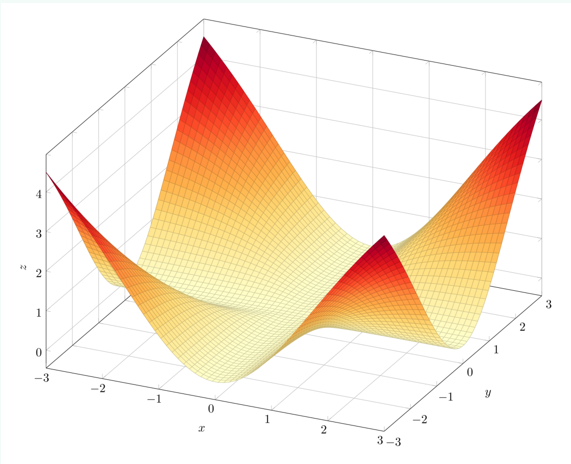
$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$$

ne peut pas exister.

Exercice 3 : Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $g : (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$.

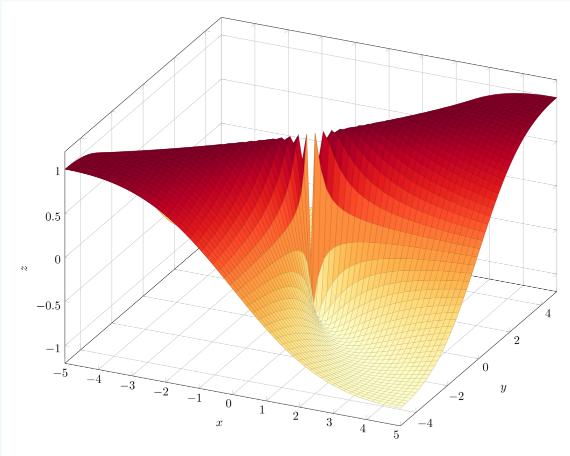
Correction :



2. $h : (x,y) \longmapsto \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $h(0,0)=1$.

Fonctions de deux variables

Correction :



II/ Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 4 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue et que, quel que soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(x,y)$ existe en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
2. La dérivée directionnelle $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(0,0)$ est-elle linéaire en $\vec{v}$?

   Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(\vec{v}, \mathrm{D}_{\vec{v}} f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$, forment-elles un plan ?
3. Le vecteur $\vec{v}$ étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(x,y)$ en (x,y) ?

Correction :

1. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r\cos\varphi\sin^2\varphi$ existe et vaut zéro puisque $\cos\varphi\sin^2\varphi$ est borné.

   Par conséquent f est continue à l'origine et donc partout.

   Il est évident que la fonction f est différentiable en chaque point distinct de l'origine.

   Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Alors

$$\mathrm{D}_v f(0,0) = \frac{d}{dt}\left(t\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)\bigg|_{t=0} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

existe d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; puisqu'il existe une dérivée directionnelle non nulle, la fonction f ne peut pas être différentiable en $(0,0)$.

2. L'association $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \mathrm{D}_v f(0,0)$ n'est évidemment pas linéaire et les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs $(v, \mathrm{D}_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$ ne forment pas un plan.
3. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = 2\sin\varphi\cos^3\varphi$$

d'où, en coordonnées polaires,

$$\mathrm{D}_v f(x,y) = \mathrm{D}_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{D}_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = a(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\sin\varphi\cos^3\varphi.$$

Par conséquent, $\mathrm{D}_v f(x,y)$ n'est pas continu en (x,y) sauf peut-être si $a = 0$. Par exemple, avec $\sin\varphi = 1$, on trouve

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{D}_v f(0,r) = a$$

et $a \neq \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$ sauf si $a = 0$. Si $a = 0$, la dérivée directionnelle D_v est la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et, φ étant fixé,

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{D}_v f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 2b\sin\varphi\cos^3\varphi$$

ce qui n'est pas nul si $\sin\varphi\cos\varphi$ ne l'est pas. Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est continue en $(0,0)$ non plus.

Exercice 5 : Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition D_f.

Calculer ensuite, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition :

1. $f : (x\,;y) \longmapsto x^2 + y + xy$.
2. $f : (x\,;y) \longmapsto x\cos(x^2+y^2)$.
3. $f : (x,y) \longmapsto 2x^2 - 5xy + 3y^2$
4. $g : (x,y) \longmapsto xy^2 - 6\ln(xy + x^2) + 17$
5. $f(x,y) = x^2\exp(xy)$,
6. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$,
7. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$,
8. $f(x,y,z) = x^2y^2\sqrt{z}$.

Correction :

5. $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp(xy) + x^2y\exp(xy) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3\exp(xy)$$

6. $D_f = \{(x,y); x > 0 \text{ ou } y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2}$$

7. $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin x \cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin y \cos y$$

8. $D_f = \{(x,y,z); z > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\sqrt{z} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}$$

Exercice 6 (*) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Correction :

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x = e^{x\ln(x^2+y^2)} = e^{2r\cos\varphi \ln r}$.

   Puisque $\cos\varphi$ est borné, $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\ln r = 0$ d'où

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = e^{\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\ln r} = e^0 = 1,$$

   car la fonction exponentielle est continue.

2. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ les dérivées partielles par rapport aux variables x et y se calculent ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$

3. Pour que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(x^2)^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{2x\ln x} - 1}{x}$$

   existe. Si $x > 0$,

$$\frac{e^{2x\ln x} - 1}{x} = 2\ln x + \varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \varepsilon(x) = 0$.

Par conséquent, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(0,y)-1}{y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{(y^2)^0 - 1}{y} = 0$$

existe.

Exercice 7 : Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + y + xy$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. $(x\,;y) \longmapsto xy\,\mathrm{e}^{\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. $(x\,;y) \longmapsto x^y$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
5. $(x\,;y) \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(y)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

Exercice 8 : Soit $f : (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^y \cos(xy)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2}\,;1\right)$.

Exercice 9 : Soit $f : (x,y) \longmapsto x^2 + xy + y^2$. Déterminer $\overrightarrow{\nabla} f(1,3)$.

En déduire l'ensemble des valeurs possibles de $\partial_{\vec{u}} f(1,3)$ pour tout vecteur $\vec{u}$ unitaire.

Exercice 10 : Soit $f : (x\,;y) \longmapsto x^2 + y$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\vec{v}\,(1\,;1)$.

Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminer $\partial_{\vec{v}} f\,(x\,;y)$ pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11 : Soient $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u_\theta}(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Déterminer $\partial_{\overrightarrow{u_\theta}} f$.

Exercice 12 : Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(0,0)$.
3. Pour quelle(s) valeurs de θ cette dérivée directionnelle de f est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

Correction :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y \exp x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + \exp x$.
2. $\mathrm{D}_v f(0,0) = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\theta + \sin\theta$. Cette dérivée directionnelle de f est maximale quand $\sin\theta = \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, et minimale quand $\sin\theta = \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, c.a.d. quand $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$.

   Signification géométrique : Le plan engendré par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et l'axe des z rencontre le graphe $z = f(x,y)$ en une courbe. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour $\cos\theta = \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\theta = \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (même plan). Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (sens du paramétrage).

III/ Plan tangent

Exercice 13 : Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^y$ en $(1\,;0)$.
2. $(x\,;y) \longmapsto \sin(x+2y)$ en $(0\,;0)$.
3. $(x\,;y) \longmapsto x^2y + y^2$ en $(1\,;3)$.
4. $(x\,;y) \longmapsto -x^2 - y^2$ en $(0\,;0)$.

Exercice 14 : Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0, y_0, z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$;
2. $z = \sin(\pi x y) \exp(2x^2 y - 1)$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$.

Correction :

1. Le plan tangent à la surface d'équation $z^2 = 19 - x^2 - y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation
$$2z_0(z - z_0) = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0)$$
d'où, au point $(1, 3, 3)$, cette équation s'écrit
$$6(z - 3) = -2(x - 1) - 6(y - 3)$$
ou
$$x + 3y + 3z = 19$$
2. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \sin(\pi x y) \exp(2x^2 y - 1)$.

Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y\cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 4xy\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \pi x\cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 2x^2\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1/2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1/2) = 2.$$

Le plan tangent à la surface d'équation $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

d'où, au point $(1, 1/2, 1)$, cette équation s'écrit

$$z - 1 = 2(x-1) + 2(y-1/2)$$

ou

$$2x + 2y - z = 2.$$

Exercice 15 : On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 7)$.

Sa réponse est

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Correction :

1. L'équation d'un plan tangent doit être une équation linéaire !
2. Il confond point de tangence et variables.
3. D'après le cours, le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y) = x^4 - y^2$ au point $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 7)$ est donné par l'équation

$$z - 7 = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)(y-3)$$

c.a.d.

$$z - 7 = 32(x-2) - 6(y-3).$$

Exercice 16 (Une ellipse) : Soit $(a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Déterminer l'équation de la tangente à un point de cette courbe.

Exercice 17 : Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$. Même question avec le plan $3x + 5y - 2z = 3$.

Correction : Le plan tangent à la surface d'équation $z = 4x^2 + y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par l'équation

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 8x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) \\ z &= 8x_0x + 2y_0y + z_0 - 8x_0^2 - 2y_0^2 = 8x_0x + 2y_0y - z_0. \end{aligned}$$

d'où par

$$z - 8x_0x - 2y_0y = z_0. \tag{XXXIII.1}$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan d'équation $x + 2y + z = 6$ il faut et il suffit que $\det\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4x_0\\y_0\end{pmatrix}\right) = 0$ *i.e.* $y_0 = 8x_0$.

Par conséquent, les points cherchés sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ sont $(x_0\,; 8x_0\,; 20x_0^2)$.

De même, pour que le plan (XXXIII.1) soit parallèle au plan d'équation $3x + 5y - 2z = 3$ il faut et il suffit que les vecteurs normaux soient colinéaires $(3/2, 5/2) = (8x_0, 2y_0)$ d'où que $x_0 = 3/16$ et $y_0 = 5/4$, et le point cherché sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ est alors le point $(3/16, 5/4, 9/64 + 25/16) = (3/16, 5/4, 109/64)$.

Exercice 18 : Soit C le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et C^+ le demi-cône où $z \geqslant 0$.

Pour un point quelconque M_0 de $C \setminus \{(0, 0, 0)\}$, de coordonnées $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$, on note P_{M_0} le plan tangent au cône C en M_0.

1. Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan P_{M_0}.
2. Montrer que l'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée de deux droites D_1 et D_2 et que l'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites D_1^+ et D_2^+.
3. Montrer que le plan tangent au cône C est le même en tout point de $D_1 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ (respectivement en tout point de $D_2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$).

Correction :

1. Le vecteur normal du cône C au point (x_0, y_0, z_0) de C est le vecteur $(x_0, y_0, -z_0)$ et le plan tangent au cône C en ce point est donné par l'équation

   $$x_0x + y_0y - z_0z = 0$$

   car l'origine appartient à ce plan.
2. L'intersection du cône C avec le plan vertical d'équation $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ est constituée des points $x(1, a, \pm\sqrt{1 + a^2})$ où $x \in \mathbb{R}$, c.a.d. des deux droites

   $$D_1 = \{x(1, a, \sqrt{1 + a^2}); x \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{x(1, a, -\sqrt{1 + a^2}); x \in \mathbb{R}\}.$$

L'intersection du demi-cône C^+ avec ce plan vertical est donc constituée des deux demi-droites

$$D_1^+ = \{x(1, a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$$
$$D_2^+ = \{x(-1, -a, \sqrt{1+a^2}); x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}.$$

3. Le vecteur normal en un point quelconque $x(1, a, \sqrt{1+a^2})$ de D_1 respectivement $x(1, a, -\sqrt{1+a^2})$ de D_2 est le vecteur $x(1, a, -\sqrt{1+a^2})$ respectivement $x(1, a, \sqrt{1+a^2})$ d'où la direction et donc le plan tangent au cône C sont le même en tout point de $D_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ respectivement $D_2 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Exercice 19 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - 2y^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent P_{M_0} au graphe G_f de f en un point quelconque M_0 de G_f.
2. Pour le point M_0 de coordonnées $(2, 1, 2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en M soit parallèle à P_{M_0}.

Correction :

1. L'équation du plan tangent au graphe $z = x^2 - 2y^3$ de la fonction f au point (x_0, y_0, z_0) est donnée par :
$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0) - 6y_0^2(y - y_0) = 2x_0x - 6y_0^2y - 2x_0^2 + 6y_0^3$$
2. Au point $(2, 1, 2)$, ce plan tangent est ainsi donné par l'équation
$$4x - 6y - z = 0.$$
Pour que ce plan soit parallèle au plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) distinct de (x_0, y_0, z_0) il faut et il suffit que $(4, 6, -1) = (2x_1, 6y_1^2, -1)$ et $y_1 \neq 1$, c.a.d. que $(x_1, y_1, z_1) = (2, -1, 6)$.

IV/ Composées

Exercice 20 : Soit f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0.$ (XXXIII.2)

Correction :

- $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial z}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial x}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial y}$

d'où (XXXIII.2).

Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Calculer la dérivée première de $\phi : t \longmapsto f(t^2, t^3)$
2. Calculer les dérivées partielles de $g : (t, u) \longmapsto f(2t - u, 4t + 3u)$.
3. Calculer les dérivées partielles de $h : (t, u) \longmapsto f(t^2 + 2u^2, e^{tu})$.

Exercice 22 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0) \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0)$.

Soient $g : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0) \\ (r\,;\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta\,;r\sin\theta) \end{array}$ et $\mathrm{F} = f \circ g$.

1. Justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[\times \mathbb{R}$.
2. Soit $(r\,;\theta) \in \,]0\,;+\infty[\times \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}(r\,;\theta)$ et $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}(r\,;\theta)$ en fonction de f, r et θ.
   (b) En déduire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$ en fonction de F, r et θ.

V/ Extrema

Exercice 23 : Montrer que :

1. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y$ ne peut avoir d'extremum local qu'au point $(1, 0)$.
2. $(x\,;y) \longmapsto (x - y)^2 + x^3$ ne possède aucun extremum local.

Exercice 24 : Déterminer les extrema de :

1. $(x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2$.
2. $(x, y) \longmapsto x^2 + y^3$.
3. $(x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$.
4. $(x, y) \longmapsto (x - y)^2 + (x + y)^3$.
5. $(x, y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
6. $(x, y) \longmapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$.
7. $(x, y) \longmapsto x^2y + \ln(1 + y^2)$.
8. $(x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Exercice 25 : Déterminer $\sup\limits_{(x,y)\in[-1,1]^2} (x^3 - xy + y^3)$.

Exercice 26 (Extrait écrit ATS) : On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=\left(x^2+y^2-3\right)^2+4y^2-8$.

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z=g(x,y)=\left(x^2+y^2-3\right)^2+4y^2-8.$$

1. Comparer $g(x,y)$ avec $g(x,-y), g(-x,y), g(-x,-y)$. Déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de S.
2. Montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=4x\left(x^2+y^2-3\right)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.
4. Trouver tous les couples de réels solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x\left(x^2+y^2-3\right)=0\\ 4y\left(x^2+y^2-1\right)=0\end{cases}$$

5. En déduire que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.