Déterminants $(*)$

Exercice 1 (Factorisation de polynômes) : Déterminer les cas d'annulation des déterminants suivants, puis les calculer :

1. $\begin{vmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & n-x \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & z \\ b & b & c & & z \\ c & c & c & & z \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \dots & z \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a+x} & \dfrac{1}{a+y} & \dfrac{1}{a+z} \\ \dfrac{1}{b+x} & \dfrac{1}{b+y} & \dfrac{1}{b+z} \\ \dfrac{1}{c+x} & \dfrac{1}{c+y} & \dfrac{1}{c+z} \end{vmatrix}$.

Correction :

1. $-x(1-x)(2-x)\dots(n-1-x)$.
2. $(x-a_1)\dots(x-a_n)(x+a_1+\dots+a_n)$.
3. $z(y-z)(x-y)\dots(a-b)$.
4. $\dfrac{\mathrm{V}(a,b,c)\mathrm{V}(x,y,z)}{(a+x)\dots(c+z)}$.

Exercice 2 (Calcul par dérivation) :

1. Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.

   Montrer que f est dérivable et que : $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.
3. Application : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Correction : 3.$\sin\alpha - \sin\beta - \sin(\alpha-\beta)$.

Exercice 3 : Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}.$$

Correction : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2(-7) = -12 \neq 0$ et le système est de CRAMER en x_1, x_2 et x_4.
On note aussi que le système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension $5 - 3 = 2$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \\ x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 = 5x_3 + 4x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}((-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + x_3 + 2x_5) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = -x_1 + 3x_3 + 3x_5 \\ x_1 + 2(-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + 3(-x_1 + 3x_3 + 3x_5) = x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 3x_5 x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\mathrm{F} = \{(3x_3 + 3x_5, -x_3 - 2x_5, x_3, 0, x_5),\ (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = (3, -1, 1, 0, 0)$ et $e_2 = (3, -2, 0, 0, 1)$ et, puisque $\dim \mathrm{F} = 2$, une base de F est (e_1, e_2).

Exercice 4 : Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Correction :

1. En développant par rapport à la première colonne on trouve la relation suivante :

Déterminants $(*)$

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 3 \\ 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

Notons δ ce dernier déterminant (dont la matrice est de taille $n-1 \times n-1$). On le calcule en développant par rapport à la première ligne

$$\delta = (-1)^{n-2}(n-1)\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$

Donc

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2.$$

2. Prouvons la formule

$$\Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

par récurrence sur $n \geqslant 2$.

— **Initialisation.** Pour $n = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ donc la formule est vraie.

— **Hérédité.** Supposons la formule vraie vraie au rang $n-1$, c'est-à-dire $\Delta_{n-1} = a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2$. Calculons Δ_n :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2 && \text{par la première question} \\ &= a\left(a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2\right) - a^{n-2}(n-1)^2 && \text{par l'hypothèse de récurrence} \\ &= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-2} i^2 - a^{n-2}(n-1)^2 \\ &= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang n.

— **Conclusion.** Par le principe de récurrence la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 5 : Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Déterminants $(*)$

Correction : Commençons par un travail préparatoire : le calcul du déterminant de taille $(n-1)\times(n-1)$:

$$\Gamma_k = \left|\begin{array}{cccc|cccc} x & & & & & & & \\ -1 & x & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & x & & & & \\ \hline & & & & -1 & x & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & x \\ & & & & & & & -1 \end{array}\right|$$

où le bloc en haut à gauche est de taille $k \times k$.

On développe, en commençant par la première ligne, puis encore une fois par la première ligne,... pour trouver que

$$\Gamma_k = x^k \times (-1)^{n-1-k}$$

Autre méthode : on retrouve le même résultat en utilisant les déterminant par blocs :

$$\left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline (0) & \mathrm{C} \end{array}\right| = \det \mathrm{A} \times \det \mathrm{C}$$

Revenons à l'exercice !

Contrairement à l'habitude on développe par rapport à la colonne qui a le moins de 0. En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^n a_1 \begin{vmatrix} x & & & & \\ & -1 & x & & \\ & & -1 & x & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{2n-3} a_{n-2} \begin{vmatrix} x & & & & \\ -1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & x & \\ & & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n-2}(x + a_{n-1}) \begin{vmatrix} x & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times \Gamma_k \quad + \quad (-1)^{2n-2}(x + a_{n-1})\Gamma_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times x^k \times (-1)^{n-1-k} \quad + \quad (x + a_{n-1})x^{n-1} \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Racines de l'unité) : On note $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\alpha = e^{i\pi/n}$ et D le déterminant $n \times n$: $\mathrm{D} = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)$.

1. Calculer D^2.
2. Montrer que $\mathrm{D} = \prod_{k<\ell}(\omega^\ell - \omega^k) = \prod_{k<\ell}\left(\alpha^{k+\ell} \cdot 2i\sin\dfrac{\ell-k}{n}\pi\right)$.
3. Exprimer D sous forme trigonométrique.

Correction :

1. $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & n \\ \vdots & & \dots & \\ 0 & n & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}^2 = \varepsilon_{n-1} n^n$.
2.
3. $n^{n/2}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 7 (Cosinus) : Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Mettre le déterminant : $\det\left(\cos((j-1)\alpha_i)\right)$ sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Correction : Polynômes de Tchebychev $\Rightarrow \mathrm{D} = 2^{(n-1)(n-2)/2}\mathrm{V}(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$.

Exercice 8 ($(x_i + y_j)^k$) : Soit $k \leqslant n-1$ et $\mathrm{M} = \left((x_i+y_j)^k\right)$.

Écrire M comme produit de deux matrices et calculer $\det \mathrm{M}$.

Correction : $\mathrm{M} = (x_i^{j-1}) \times (\mathrm{C}_k^{i-1} y_j^{k-i+1}) \Rightarrow$

$$\det \mathrm{M} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n-1 \\ \varepsilon_n \mathrm{C}_{n-1}^0 \mathrm{C}_{n-1}^1 \dots \mathrm{C}_{n-1}^{n-1} \mathrm{V}(x_1, \dots, x_n)\mathrm{V}(y_1, \dots, y_n) & \text{si } k = n-1. \end{cases}$$

Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 9 ($\mathrm{P}(i+j)$) : Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{A} = \left(\mathrm{P}(i+j)\right) \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.

Développer $\mathrm{P}(i+j)$ par la formule de Taylor et écrire A comme produit de deux matrices. En déduire det A.

Correction : $\mathrm{A} = \left(\dfrac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right) \times \left(\mathrm{P}^{(i-1)}(j)\right) \Rightarrow \det \mathrm{A} = \varepsilon_n\left(a_{n-1}(n-1)!\right)^n$. Avec la notation : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 (\text{mod } 4) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 10 (**) : Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

Correction : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Notons Δ le déterminant de l'énoncé.

Pour x réel, on pose $\mathrm{D}(x) = \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$ (de sorte que $\Delta = \mathrm{D}(a)$). D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de x^2 vaut

$$-(-2c) + (b+c) + (b+c) - (-2b) = 4(b+c).$$

Puis,

$$\mathrm{D}(-b) = \begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = 2b(4bc - (b+c)^2) + 2b(c-b)^2 = 0,$$

et par symétrie des rôles de b et c, $\mathrm{D}(-c) = 0$. De ce qui précède, on déduit que si $b \neq c$, $\mathrm{D}(x) = 4(b+c)(x+b)(x+c)$ (même si $b+c=0$ car alors D est un polynôme de degré infèrieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul). Ainsi, si $b \neq c$ (ou par symétrie des roles, si $a \neq b$ ou $a \neq c$), on a : $\Delta = 4(b+c)(a+b)(a+c)$. Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où $a = b = c$. Dans ce cas,

$$\mathrm{D}(a) = \begin{vmatrix} -2a & 2a & 2a \\ 2a & -2a & 2a \\ 2a & 2a & -2a \end{vmatrix} = 8a^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3 = 4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour a et b fixés, la fonction Δ est une fonction continue de c et on obtient la valeur de Δ pour $c = b$ en faisant tendre c vers b dans l'expression de Δ déjà connue pour $c \neq b$).

$$\Delta = 4(a+b)(a+c)(b+c).$$

Exercice 11 (**) : Pour a, b et c deux à deux distincts donnés, factoriser $\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$.

Correction : Soit $P = \begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$. P est un polynôme unitaire de degré 4.

En remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ et par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que P est divisible par $(X + a + b + c)$.

Mais aussi, en remplaçant C_1 par $C_1 - C_2 - C_3 + C_4$ ou $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ ou $C_1 + C_2 - C_3 - C_4$, on voit que P est divisible par $(X - a - b + c)$ ou $(X - a + b - c)$ ou $(X + a - b - c)$.

1er cas. Si les quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont deux à deux distincts, P est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux.

Dans ce cas, $P = (X + a + b + c)(X + a + b - c)(X + a - b + c)(X - a + b + c)$.

2ème cas. Deux au moins des quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont égaux.

Notons alors que $-a - b - c = a + b - c \Leftrightarrow b = -a$ et que $-a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow a = b$.

Par symétrie des rôles, deux des quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont égaux si et seulement si deux des trois nombres $|a|$, $|b|$ ou $|c|$ sont égaux.

On conclut dans ce cas que l'expression de P précédemment trouvée reste valable par continuité par rapport à a, b ou c.

$$P = (X + a + b + c)(X + a + b - c)(X + a - b + c)(X - a + b + c).$$

Exercice 12 (***) : Calculer :

1. $\det\left(|i - j|\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

2. $\det\left(\sin(a_i + a_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ $(a_1,\ldots,a_n$ étant n réels donnés)

3. $\begin{vmatrix} a & 0 & \ldots & & \ldots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \ldots & & \ldots & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\det\left(C_{n+i-1}^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$

6. $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \ldots & & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} - X \end{vmatrix}$

Correction :

1. Pour $n \geqslant 2$, posons $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1. Pour cela, on effectue les transformations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis ...puis $C_{n-1} = C_{n-1} - C_n$. On obtient

$$\Delta_n = \det\left(C_1 - C_2, C_2 - C_3, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & & \vdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On fait alors apparaître un déterminant triangulaire en constatant que $\det\left(L_1, L_2, \dots, L_n\right) = \det\left(L_1, L_2 + L_1, \dots, L_{n-1} + L_1, L_n + L_1\right)$. On obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

.

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

2. $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\sin(a_i + a_j) = \sin a_i \cos a_j + \cos a_i \sin a_j$ et donc si on pose $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \cos a_2 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \sin a_2 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$, on a $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $C_j = \cos a_j S + \sin a_j C$. En particulier, $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \mathrm{Vect}(C, S)$ et le rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\forall n \geqslant 3,\ \det\left(\sin(a_i + a_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0.$$

Si $n = 2$, $\det\left(\sin(a_i + a_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} = \sin(2a_1)\sin(2a_2) - \sin^2(a_1 + a_2)$.

3. L'exercice n'a de sens que si le format n est pair. Posons $n = 2p$ où p est un entier naturel non nul.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} (\text{pour } 1 \leqslant j \leqslant p,\ C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j})$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} (\text{par linéarité par rapport aux colonnes } C_1,\ C_2, \dots,\ C_p)$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} (\text{pour } p+1 \leqslant i \leqslant 2p,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}).$$

et $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2-b^2)^p$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*_{n_0},\ \Delta_{2p} = (a^2-b^2)^p.$$

4. On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

5. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$L_{i+1} - L_i = (C^0_{n+i} - C^0_{n+i-1}, C^1_{n+i} - C^1_{n+i-1}, \dots, C^p_{n+i} - C^p_{n+i-1}) = (0, C^0_{n+i-1}, C^1_{n+i-1}, \dots, C^{p-1}_{n+i-1}).$$

On remplace alors dans cet ordre L_p par $L_p - L_{p-1}$ puis L_{p-1} par $L_{p-1} - L_{p-2}$ puis ... puis L_2 par $L_2 - L_1$ pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = \dots = \det(A_1) = 1$.

6. En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

Déterminants ($*$)

où $\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} -X & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & -X & & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -X & 1 \end{array}\right| = (-1)^k X^k$ et donc

$$\forall n \geqslant 2,\ D_n = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right).$$

Exercice 13 (** Déterminant de Cauchy et déterminant de Hilbert) :**

Soit $A = \left(\dfrac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont $2n$ réels tels que toutes les sommes $a_i + b_j$ soient non nulles.

Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de Vandermonde par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i = b_i = i$.

Correction : Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$. On a

$$\det A = \frac{1}{\lambda_n} \det\left(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j\right) = \det B,$$

où la dernière colonne de B est de la forme $(R(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $R = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X + b_j}$.

On prend $R = \dfrac{(X - a_1)\dots(X - a_{n-1})}{(X + b_1)\dots(X + b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $a_i \neq -b_j$). Les pôles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée.

Pour ce choix de R, puisque $R(a_1) = \dots = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n) \Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z \to -b_n} (z + bn) R(z) = \frac{(-b_n - a_1)\dots(-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1)\dots(-b_n + b_{n-1})} = \frac{(a_1 + b_n)\dots(a_{n-1} + b_n)}{(b_n - b_1)\dots(b_n - b_{n-1})}.$$

Donc
$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = \frac{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})(b_n-b_1)...(b_n-b_{n-1})}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)...(a_n+b_n)..(a_2+b_n)(a_1+b_n)}\Delta_{n-1}.$$
En réitérant et compte tenu de $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} = \frac{\mathsf{Van}(a_1,...,a_n)\mathsf{Van}(b_1,...,b_n)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.$$

Dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de HILBERT) à calculer : $\mathrm{H}_n = \dfrac{\mathsf{Van}(1,2,...,n)^2}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)}$. Mais,

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n}k!}{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2},$$

et d'autre part,

$$\mathsf{Van}(1,2,...,n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k!.$$

Donc,

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{H}_n = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^3}{n!^2\times\prod_{k=1}^{2n}k!}.$$

Exercice 14 (****) : Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout i et tout j, $a_{i,j} \in \{-1,1\}$.

Montrer que $\det\ \mathrm{A}$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Correction : On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$. ▪ Pour $n = 1$, c'est clair.

▪ Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout déterminant Δ_n de format n et du type de l'énoncé soit divisible par 2^{n-1}. Soit Δ_{n+1} un déterminant de format $n+1$, du type de l'énoncé.

Si tous les coefficients $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} sont égaux à 1, puisque $n+1 \geqslant 2$, Δ_{n+1} a deux colonnes égales et est donc nul. Dans ce cas, Δ_{n+1} est bien divisible par 2^n.

Sinon, on va changer petit à petit tous les -1 en 1.

Soit (i,j) un couple d'indices tel que $a_{i,j} = -1$ et Δ'_{n+1} le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de Δ_{n+1} sauf le coefficient ligne i et colonne j qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det\left(\mathrm{C}_1,...,\mathrm{C}_j,...,\mathrm{C}_n\right) - \det\left(\mathrm{C}_1,...,\mathrm{C}'_j,...,\mathrm{C}_n\right) = \det\left(\mathrm{C}_1,...,\mathrm{C}_j-\mathrm{C}'_j,...,\mathrm{C}_n\right),$$

Déterminants $(*)$

où $C_j - C'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (-2 en ligne i). En développant ce dernier déterminant suivant sa j-ème colonne, on obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

où Δ_n est un déterminant de format n et du type de l'énoncé.

Par hypothèse de récurrence, Δ_n est divisible par 2^{n-1} et donc $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$ est divisible par 2^n.

Ainsi, en changeant les -1 en 1 les uns après les autres, on obtient

$$\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \pmod{2^n}.$$

Ce dernier déterminant étant nul, le résultat est démontré par récurrence.

Exercice 15 (I) :** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{i+j}a_{i,j}$.

Montrer que $\det(B) = \det(A)$.

Correction :

1ère solution.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n} \text{ (car } 1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n) = 2(1+2+\ldots+n) \in 2\mathbb{N}_{n_0}) \\ &= \det A\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie par -1 les lignes $2, 4, 6\ldots$ puis les colonnes $2, 4, 6\ldots$

On obtient $\det B = (-1)^{2p}\det A = \det A$ (où p est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

Exercice 16 (*I) :** Calculer $\det(\mathrm{com}A)$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\mathrm{com}A$ en fonction du rang de A.

Correction : On a toujours $\mathrm{A}\times{}^t\mathrm{comA}=(\det\mathrm{A})\mathrm{I}_n$ et donc

$$(\det\mathrm{A})(\det(\mathrm{comA}))=(\det\mathrm{A})(\det({}^t\mathrm{comA}))=\det(\det\mathrm{A}\ \mathrm{I}_n)=(\det\mathrm{A})^n.$$

▪ Si $\det\mathrm{A}\neq 0$, on obtient $\det(\mathrm{comA})=(\det\mathrm{A})^{n-1}$. ▪ Si $\det\mathrm{A}=0$, alors $\mathrm{A}^t\mathrm{comA}=0$ et comA n'est pas inversible car sinon, $\mathrm{A}=0$ puis $\mathrm{comA}=0$ ce qui est absurde. Donc, $\det(\mathrm{comA})=0$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\forall\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathscr{C}),\ \det(\mathrm{comA})=(\det\mathrm{A})^{n-1}.$$

▪ Si $\mathrm{rgA}=n$, alors $\mathrm{comA}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (car $\det(\mathrm{comA})\neq 0$) et $\mathrm{rg(comA)}=n$.

▪ Si $\mathrm{rgA}\leqslant n-2$, alors tous les mineurs de format $n-1$ sont nuls et $\mathrm{comA}=0$. Dans ce cas, $\mathrm{rg(comA)}=0$.

▪ Si $\mathrm{rgA}=n-1$, il existe un mineur de format $n-1$ non nul et $\mathrm{comA}\neq 0$. Dans ce cas, $1\leqslant\mathrm{rg(comA)}\leqslant n-1$. Plus précisément,

$\mathrm{A}^t\mathrm{comA}=0\Rightarrow\mathrm{comA}^t\mathrm{A}=0\Rightarrow\mathrm{Im}({}^t\mathrm{A})\subset\mathrm{Ker(comA)}\Rightarrow\dim(\mathrm{Ker(comA)})\geqslant\mathrm{rg}({}^t\mathrm{A})=\mathrm{rgA}=n-1\Rightarrow\mathrm{rg(comA)}\leqslant 1$

et finalement si $\mathrm{rgA}=n-1$, $\mathrm{rg(comA)}=1$.

Exercice 17 (*I Dérivée d'un déterminant) :** Soient $a_{i,j}$ ((i,j) élément de $\{1,\dots,n\}^2$) n^2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{A}=(ai,j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto\det(\mathrm{A}(x))$.
2. Calculer

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1\\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1\end{vmatrix}\qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x\\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & x\\ x & \dots & \dots & x & x+a_n\end{vmatrix}$$

Correction :

1.

$$(\det\mathrm{A})'=\left(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\right)'=\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)\left(\sum_{k=1}^n a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^n\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n}=\sum_{k=1}^n\det(\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}'_k,\dots,\mathrm{C}_n)$$

2. (a) Soit $\Delta_n(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1\\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1\end{vmatrix}$.

Δ_n est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui précède, $\Delta'_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$ où δ_k est le déterminant déduit de Δ_n en remplaçant sa k-ème colonne par le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En développant δ_k par rapport à sa k-ème colonne, on obtient $\delta_k = \Delta_{n-1}$ et donc $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$.

Ensuite, on a déjà $\Delta_1 = \mathrm{X}+1$ puis $\Delta_2 = (\mathrm{X}+1)^2 - 1 = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}$ ...

Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = \mathrm{X}^n + n\mathrm{X}^{n-1}$.

C'est vrai pour $n = 1$ puis, si pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = \mathrm{X}^n + n\mathrm{X}^{n-1}$ alors $\Delta'_{n+1} = (n+1)\mathrm{X}^n + (n+1)n\mathrm{X}^{n-1}$ et, par intégration, $\Delta_{n+1} = \mathrm{X}^{n+1} + (n+1)\mathrm{X}^n + \Delta_{n+1}(0)$.

Mais, puisque $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$ et $\Delta_{n+1}(0)$ est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques.

Par suite, $\Delta_{n+1}(0) = 0$ ce qui montre que $\Delta_{n+1} = \mathrm{X}^{n+1} + (n+1)\mathrm{X}^n$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*_{n_0},\ \Delta_n = x^n + nx^{n-1}.$$

(b) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$. $\Delta_n = \det(a_1e_1 + x\mathrm{C}, ..., a_ne_n + x\mathrm{C})$ où e_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et C est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1.

Par linéarité par rapport à chaque colonne, Δ_n est somme de 2^n déterminants mais dès que C apparait deux fois, le déterminant correspondant est nul.

Donc, $\Delta_n = \det(a_1e_1, ..., a_ne_n) + \sum \det(a_1e_1, ..., x\mathrm{C}, ..., a_ne_n)$. Ceci montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

La formule de TAYLOR fournit alors : $\Delta_n = \Delta_n(0) + \mathrm{X}\Delta'_n(0)$.

Immédiatement, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^{n} a_k = \sigma_n$ puis $\Delta'_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \det(a_1e_1, ..., \mathrm{C}, ..., a_ne_n) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} a_i = \sigma_{n-1}$.

Donc, $\Delta_n = \sigma_n + \mathrm{X}\sigma_{n-1}$.

Exercice 18 (*I) :** Calculer

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$
2. $\det\left((i+j-1)^2\right)$

3. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$ b, c complexes distincts

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Correction :

1. Pour le premier déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est $(-1)^{n-1}$.

   Pour le deuxième, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met $(n-1)$ en facteurs de la première colonne et on tombe sur le premier déterminant.

   Le deuxième déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}(n-1)$.
2. Pour (i,j) élément de $[\![1\,;n]\!]^2$, $(i+j-1)^2 = j^2 + 2(i-1)j + (i-1)^2$. Donc,
$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \mathrm{C}_j = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2j(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n} + ((i-1)^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$
   Les colonnes de la matrice sont donc éléments de Vect$((1)_{1\leqslant i\leqslant n}, (i-1)_{1\leqslant i\leqslant n}, ((i-1)2)_{1\leqslant i\leqslant n})$ qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang inférieur ou égal à 3.

   Donc, si $n \geqslant 4$, $\Delta_n = 0$. Il reste ensuite à calculer $\Delta_1 = 1$ puis $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7$ puis
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (225-256) - 4(100-144) + 9(64-81) = -31 + 176 - 153 = -8.$$
3.
$$\Delta_n = \det(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n) = \det(\mathrm{C}_1 + \dots + \mathrm{C}_n, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_n) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$
   par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros $2, \dots, n$, on retranche la première ligne pour obtenir :
$$\Delta_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

4. Par n linéarité, D_n est somme de 2^n déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il contient au moins deux colonnes de x. Ainsi, en posant $\Delta_n = \det(C_1 + xC, ..., C_n + xC)$ où $C_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ b \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $C = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on obtient :

$$\Delta_n = \det(C_1, ..., C_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(C_1, ..., C_{k-1}, xC, C_{k+1}, ..., C_n),$$

ce qui montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Posons $\Delta_n = AX + B$ et $P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X)$.

Quand $x = -b$ ou $x = -c$, le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc :

1er cas. Si $b \neq c$. $\Delta_n(-b) = P(b)$ et $\Delta_n(-c) = P(c)$ fournit le système $\begin{cases} -bA + B = P(b) \\ -cA + B = P(c) \end{cases}$ et donc $A = -\dfrac{P(c) - P(b)}{c - b}$ et $B = \dfrac{cP(b) - bP(c)}{c - b}$. Ainsi,

$$\text{si } b \neq c,\ \Delta_n = -\frac{P(c) - P(b)}{c - b}x + \frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} \text{ où } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).$$

2ème cas. Si $b = c$, l'expression obtenue en fixant x et b est clairement une fonction continue de c car polynômiale en c. On obtient donc la valeur de Δ_n quand $b = c$ en faisant tendre c vers b dans l'expression déjà connue de Δ_n pour $b \neq c$.

Maintenant, quand b tend vers c, $-\dfrac{P(c) - P(b)}{c - b}$ tend vers $-P'(b)$ et

$$\frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} = \frac{c(P(b) - P(c)) + (c - b)P(c)}{c - b},$$

tend vers $-bP'(b) + P(b)$.

$$\text{si } b = c,\ \Delta_n = -xP'(b) + P(b) - bP'(b) \text{ où } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).$$

5. $\Delta_2 = 3$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$. Puis, pour $n \geqslant 4$, on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

D'où, pour $n \geqslant 4$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ et la suite $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n\geqslant 3}$ est constante.

Par suite, pour $n \geqslant 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$ et donc la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ est arithmétique de raison 1.

On en déduit que, pour $n \geqslant 2$, $\Delta_n = \Delta_2 + (n-2)\times 1 = n+1$ (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = n+1.$$

Exercice 19 (**I Déterminant de Cauchy) :** Soient $a_1,\dots,\ a_n,\ b_1,\dots,\ b_n$ $2n$ nombres complexes tels que toutes les sommes $a_i + b_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, soient non nulles.

Calculer $\mathrm{C}_n = \det\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Cas particulier : $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_i = b_i = i$ (déterminant de Hilbert).

Correction : Si deux des a_i sont égaux ou deux des b_j sont égaux, C_n est nul car C_n a soit deux lignes identiques, soit deux colonnes identiques.

On suppose dorénavant que les a_i sont deux à deux distincts de même que les b_j (et toujours que les sommes $a_i + b_j$ sont toutes non nulles).

Soit $n \in \mathbb{N}^*_{n_0}$. On note $\mathrm{L}_1,\dots,\ \mathrm{L}_{n+1}$ les lignes de C_{n+1}.

On effectue sur C_{n+1} la transformation $\mathrm{L}_{n+1} \leftarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathrm{L}_i$ avec $\lambda_{n+1} \neq 0$.

On obtient $\mathrm{C}_{n+1} = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}}\mathrm{D}_{n+1}$ où D_{n+1} est le déterminant obtenu en remplaçant la dernière ligne de C_{n+1} par la ligne $(\mathrm{R}(b_1), \dots, \mathrm{R}(b_{n+1}))$ avec $\mathrm{R} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\mathrm{X} + a_i}$. On prend $\mathrm{R} = \dfrac{(\mathrm{X} - b_1)\dots(\mathrm{X} - b_n)}{(\mathrm{X} + a_1)\dots(\mathrm{X} + a_{n+1})}$.

- Puisque les $-a_i$ sont distincts des b_j, R est irréductible.
- Puisque les a_i sont deux à deux distincts, les pôles de R sont simples.
- Puisque $\deg((\mathrm{X} - b_1)\dots(\mathrm{X} - b_n)) < \deg((\mathrm{X} + a_1)\dots(\mathrm{X} + a_{n+1}))$, la partie entière de R est nulle.

R admet donc effectivement une décomposition en éléments simples de la forme $\mathrm{R} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\mathrm{X} + a_i}$ où $\lambda_{n+1} \neq 0$.

Avec ce choix des λ_i, la dernière ligne de D_{n+1} s'écrit $(0, \dots, 0, \mathrm{R}(b_{n+1}))$ et en développant D_{n+1} suivant sa dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*_{n_0},\ \mathrm{C}_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}}\mathrm{R}(b_{n+1})\mathrm{C}_n.$$

Calculons λ_{n+1}. Puisque $-a_{n+1}$ est un pôle simple de R,

$$\lambda_{n+1} = \lim x \to -a_{n+1}(x+a_{n+1})\mathrm{R}(x) = \frac{(-a_{n+1}-b_1)\dots(-a_{n+1}-b_n)}{(-a_{n+1}+a_1)\dots(-a_{n+1}+a_n)} = \frac{(a_{n+1}+b_1)\dots(a_{n+1}+b_n)}{(a_{n+1}-a_1)\dots(a_{n+1}-a_n)}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}}\mathrm{R}(b_{n+1}) = \frac{(a_{n+1}-a_1)\dots(a_{n+1}-a_n)}{(a_{n+1}+b_1)\dots(a_{n+1}+b_n)}\frac{(b_{n+1}-b_1)\dots(b_{n+1}-b_n)}{(b_{n+1}+a_1)\dots(b_{n+1}+a_n)}$$

puis la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*_{n_0},\ \mathrm{C}_{n+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\prod_{i=1}^{n}(b_{n+1}-b_i)}{\prod_{i=n+1 \text{ ou } j=n+1}(a_i+b_j)}\mathrm{C}_n.$$

En tenant compte de $\mathrm{C}_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$, on obtient par récurrence

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\mathrm{Van}(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.$$

(y compris dans les cas particuliers analysés en début d'exercice).

Calcul du déterminant de HILBERT. On est dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_i = b_i = i$. D'abord

$$\mathrm{Van}(1,\dots,n) = \prod_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\right) = \prod_{j=2}^{n}(j-1)! = \prod_{j=1}^{n-1}i!.$$

Puis $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(i+n)!}{i!} =$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*_{n_0},\ \mathrm{H}_n = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n}i!\right)^4}{n!^2\prod_{i=1}^{2n}i!}.$$

Exercice 20 (**) : Calculer $\det\left(\sin(a_i+a_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_1,\dots,a_n$ sont n réels donnés ($n\geqslant 2$).

Correction : On note $\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n$ les colonnes du déterminant de l'énoncé puis on pose $\mathrm{C} = (\cos(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathrm{S} = (\sin(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{C}j = \sin(a_j)\mathrm{C} + \cos(a_j)\mathrm{S}$. Ainsi, les colonnes de la matrice proposée sont dans $\mathrm{Vect}(\mathrm{C},\mathrm{S})$ qui est un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\text{si } n \geqslant 3,\ \det\left(\sin(a_i + a_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.$$

Si $n = 2$, on a $\begin{vmatrix} \sin(2a_1) & \sin(a_1+a_2) \\ \sin(a_1+a_2) & \sin(2a_2) \end{vmatrix} = \sin(2a_1)\sin(2a_2) - \sin^2(a_1+a_2)$.

Exercice 21 (**) : Calculer $\det\left(a_i + b_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$ sont $2n$ complexes donnés.

Correction : Soient les vecteurs colonnes $\mathrm{A} = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathrm{U} = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{C}_j = \mathrm{A} + b_j\mathrm{U}$. Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\text{si } n \geqslant 3,\ \det\left(a_i + b_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.$$

Si $n = 2$, on a $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)(a_2+b_2)-(a_1+b_2)(a_2+b_1) = a_1b_2+a_2b_1-a_1b_1-a_2b_2 = (a_2-a_1)(b_1-b_2)$

Exercice 22 (**) : Calculer $\det\left((a+i+j)^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a est un complexe donné.

Correction : Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\mathrm{C}_j = ((a+i+j)^2)_{1\leqslant i\leqslant n} = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2(a+j)(i)_{1\leqslant i\leqslant n} + (i^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus trois et donc,

$$\text{si } n \geqslant 4,\ \det\left((a+i+j)^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.$$

Le calcul est aisé pour $n \in \{1,2,3\}$.

Exercice 23 (****) : Soient $x_1,\ldots,x_n$ n entiers naturels tels que $x_1 < \ldots < x_n$.

À l'aide du calcul de $\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i}$ est un entier naturel.

Correction : $\dfrac{x_j-x_i}{j-i}$ est déjà un rationnel strictement positif.

Posons $P_i=1$ si $i=1$, et si $i\geqslant 2$, $P_i=\dfrac{X(X-1)\dots(X-(i-2))}{(i-1)!}$.

Puisque, pour $i\in[\![1\,;n]\!]$, $\deg(P_i)=i-1$, on sait que la famille $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$.

De plus, pour $i\geqslant 2$, $P_i-\dfrac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ est de degré $i-2$ et est donc combinaison linéaire de P_1, P_2,..., P_{i-2} ou encore, pour $2\leqslant i\leqslant n$, la ligne numéro i du déterminant $\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est somme de la ligne $\left(\dfrac{x_j^{i-1}}{(i-1)!}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et d'une combinaison linéaire des lignes qui la précède.

En partant de la dernière ligne et en remontant jusqu'à la deuxième, on retranche la combinaison linéaire correspondante des lignes précédentes sans changer la valeur du déterminant.

On obtient par linéarité par rapport à chaque ligne

$$\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(i-1)!}\mathrm{Van}(x_1,\dots,x_n)=\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)}.$$

Finalement,

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i}=\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathbb{N}^*_{n_0}.$$

Exercice 24 (** Déterminant circulant) :** Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & \dots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & & & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & & a_{n-2}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & \dots & & a_n & a_1\end{pmatrix}$ et $P=(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $\omega=e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA. En déduire $\det A$.

Correction :

- Soit $(k,l)\in[\![1\,;n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de P^2 est

$$\alpha_{k,l}=\sum_{u=1}^{n}\omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{(u-1)(l-1)}=\sum_{u=1}^{n}\omega^{(k+l-2)(u-1)}=\sum_{u=0}^{n-1}(\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2}=1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$.

Mais, $0 \leqslant k+l-2 \leqslant 2n-2 < 2n$ et donc, $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0,n\} \Leftrightarrow k+l=2$ ou $k+l=n+2$.

Dans ce cas, $\alpha_{k,l}=n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l}=\frac{1-(\omega^{k+l-2})^n}{1-\omega^{k+l-2}}=\frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}}=0.$$

Ainsi, $\mathrm{P}^2=n\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

- Soit $(k,l)\in [\![1\,;n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de $\mathrm{P}\overline{\mathrm{P}}$ est

$$\beta_{k,l}=\sum_{u=1}^{n}\omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(l-1)}=\sum_{u=1}^{n}(\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or, $\omega^{k-l}=1 \Leftrightarrow k-l\in n\mathbb{Z}$. Mais, $-n<-(n-1)\leqslant k-l \leqslant n-1<n$ et donc $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k=l$. Dans ce cas, $\beta_{k,l}=n$. Sinon, $\beta_{k,l}=0$. Ainsi, $\mathrm{P}\overline{\mathrm{P}}=n\mathrm{I}_n$ (ce qui montre que $\mathrm{P}\in \mathrm{GL}_n(\mathscr{C})$ et $\mathrm{P}^{-1}=\dfrac{1}{n}\overline{\mathrm{P}}$).

Calculons enfin PA. Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A. Le coefficient ligne k, colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k, $a_{n+k}=a_k$.

Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k, colonne l de PA vaut

$$\sum_{u=1}^{n}\omega^{(k-1)(u-1)}a_{l-u+1}=\sum_{v=l-n+1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1.

$$\begin{aligned}\sum_{v=l-n+1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{v=l-n+1}^{0}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v\\ &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n} \text{ (en posant } w=v+n)\\ &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w)}a_w\\ &= \sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v=\omega^{(k-1)(l-1)}\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites (a_k) et (ω^k) ont la même période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n}=\omega^{(k-1)(l-v)}a_v$).

Pour k élément de $[\![1\,;n]\!]$, posons alors $\mathrm{S}_k=\displaystyle\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v$. On a montré que $\mathrm{PA}=(\omega^{(k-1)(l-1)}\mathrm{S}_k)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.

Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\det(\mathrm{PA}) = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\mathrm{S}_k\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{S}_k\right)\times\det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{S}_k\right)\times\det\mathrm{P}.$$

Donc $(\det\mathrm{P})(\det\mathrm{A}) = \left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{S}_k\right)\det\mathrm{P}$ et finalement, puisque $\det\mathrm{P}\neq 0$,

$$\det\mathrm{A} = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\right).$$

Par exemple, pour $n=3$, $\det\mathrm{A} = (a_1+a_2+a_3)(a_1+ja_2+j^2a_3)(a_1+j^2a_2+ja_3)$.

Exercice 25 (** Déterminants circulants) :** Soient $a_0,\dots,a_{n-1}$ n nombres complexes. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1\\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \det\mathrm{A}.$$

Pour cela, on calculera d'abord $\mathrm{A}\Omega$ où $\Omega = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Correction : Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k)\in[\![1\,;n]\!]^2$, de la matrice A vaut a_{k-j} avec la convention : si $-(n-1)\leqslant u\leqslant -1$, $a_u = a_{n+u}$.

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k)\in[\![1\,;n]\!]^2$, de la matrice $\mathrm{A}\Omega$ vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{n}a_{u-j}\omega^{(u-1)(k-1)} &= \sum_{v=-(j-1)}^{n-j}a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} = \sum_{v=-(j-1)}^{-1}a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} + \sum_{v=0}^{n-j}a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)}\\
&= \sum_{v=-(j-1)}^{-1}a_{v+n}\omega^{(v+n+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} \text{ (car } a_{v+n}=a_v \text{ et } \omega^n=1)\\
&= \sum_{u=n-j+1}^{n-1}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} = \sum_{u=0}^{n-1}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)}\\
&= \omega^{(j-1)(k-1)}\sum_{u=0}^{n-1}a_u\omega^{u(k-1)}.
\end{aligned}$$

Pour $k\in[\![1\,;n]\!]$, posons $\mathrm{S}_k = \sum_{u=0}^{n-1}a_u\omega^{u(k-1)}$. Le coefficient ligne j, colonne k de $\mathrm{A}\Omega$ vaut donc $\omega^{(j-1)(k-1)}\mathrm{S}_k$. Par passage au déterminant, on en déduit que :

$$\det(\mathrm{A}\Omega) = \det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}\mathrm{S}_k\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{S}_k\right)\det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

(S_k est en facteur de la colonne k) ou encore $(\det \mathrm{A})(\det \Omega) = \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{S}_k\right)(\det \Omega)$.

Enfin, Ω est la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité et est donc inversible puisque celles-ci sont deux à deux distinctes.

Par suite $\det \Omega \neq 0$ et après simplification on obtient

$$\det \mathrm{A} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{S}_k \text{ où } \mathrm{S}_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u \omega^{u(k-1)}.$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\mathrm{S}_3 = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 26 (I) :**

1. Soient $a_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, n^2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{C}$. Soit $d = \det(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

   Montrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer d'.

2. Application : calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

Correction :

1. $d = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\begin{aligned} d' &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n})' \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}'_i, \dots, \mathrm{C}_n) \text{ (où } \mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n \text{ sont les colonnes de la matrice).} \end{aligned}$$

2. **1 ère solution.** D'après ce qui précède, la fonction d_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $n \geqslant 2$ et x réel, on a

$$d_n'(x)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & & & \\ & & \ddots & x+1 & 0 & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & \vdots & 0 & x+1 & \ddots & & \\ & & & & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix} \text{(la colonne particulière est la colonne } i\text{)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} d_{n-1}(x) \text{(en développant le } i\text{-ème déterminant par rapport à sa } i\text{-ème colonne)}$$

$$= nd_{n-1}(x).$$

En résumé, $\forall n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = nd_{n-1}(x)$. D'autre part $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_1(x) = x+1$ et $\forall n \geqslant 2$, $d_n(0) = 0$ (déterminant ayant deux colonnes identiques).

Montrons alors par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

- C'est vrai pour $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^n + nx^{n-1}$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$d_{n+1}(x) = d_{n+1}(0) + \int_0^x d_{n+1}'(t)\,dt = (n+1)\int_0^x d_n(t\,dt) = x^{n+1} + (n+1)x^n.$$

On a montré que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ d_n(x) = x^n + nx^{n-1}.$$

2 ème solution. d_n est clairement un polynôme de degré n unitaire.

Pour $n \geqslant 2$, puisque dn(0) = 0 et que $d_n' = nd_{n-1}$, 0 est racine de d_n, d_n', ..., $d_n^{(n-2)}$ et est donc racine d'ordre $n-1$ au moins de d_n.

Enfin, $d_n(-n) = 0$ car la somme des colonnes du déterminant obtenu est nulle.

Finalement $\forall n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^{n-1}(x+n)$ ce qui reste vrai pour $n = 1$.

Une variante peut être obtenue avec des connaissances sur la réduction.

Exercice 27 (***) : Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n. Montrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de format $2n$ est un réel positif.

Correction : On effectue sur la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ les transformations : $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + iC_{n+j}$ (où $i^2 = -1$) sans modifier la valeur du déterminant. On obtient $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix}$.

Puis en effectuant les transformations : $\forall j \in [\![n+1, 2n]\!]$, $L_j \leftarrow L_j - iL_{j-n}$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \times \det(A - iB).$$

Comme les matrices A et B sont réelles, $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$ et donc

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 28 (***) : Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de format n. Montrer que si C et D commutent et si D est inversible alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Montrer que le résultat persiste si D n'est pas inversible.

Correction : Si D est inversible, un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ CD - DC & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ (car } C \text{ et } D \text{ commutent)}$$

et donc, puisque

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right) &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det D \times \det D^{-1} \\ &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et que $\det \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$, on a bien $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ (si C et D commutent).

Si D n'est pas inversible, $\det(D - xI)$ est un polynôme en x de degré n et donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

Par suite, la matrice $D - xI$ est inversible sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x.

D'autre part, pour toute valeur de x, les matrices C et $\mathrm{D}-x\mathrm{I}$ commutent et d'après ce qui précède, pour toutes valeurs de x sauf peut-être pour un nombre fini, on a

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det\left(\mathrm{A}(\mathrm{D}-x\mathrm{I})-\mathrm{BC}\right).$$

Ces deux expressions sont encore des polynômes en x qui coïncident donc en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux.

Ces deux polynômes prennent en particulier la même valeur en 0 et on a montré que

$$\text{si C et D commutent, } \det\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det\left(\mathrm{AD}-\mathrm{BC}\right).$$

Exercice 29 (I) :** Soient a_0, ... , a_{n-1} n nombres complexes et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Calculer $\det\left(\mathrm{A}-x\mathrm{I}_n\right)$.

Correction : En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\det\left(\mathrm{A}-x\mathrm{I}_n\right) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n - x \end{vmatrix} = (-x)^n(a_n - x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k\Delta_k$$

$$\text{où } \Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \dots & \times & -x & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-x)^k 1^{n-k} = (-x)^k \text{ (déterminant par blocs)}$$

Finalement,

$$\det\left(\mathrm{A}-x\mathrm{I}_n\right) = (-x)^n(a_n - x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k(-x)^k = (-1)^{n+1}\left(x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right).$$

Exercice 30 (**) : Calculer les déterminants suivants :

1. $\det \mathrm{A}$ où $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$

4. (I) $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$.

Correction :

1. Sans modifier la valeur de $\det \mathrm{A}$, on effectue les transformations :$\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \mathrm{C}_{2n+1-j}$.

   On obtient alors par linéarité du déterminant par rapport à chacune des n premières colonnes

$$\det \mathrm{A} = (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

   On effectue ensuite les transformations : $\forall i \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_{2n+1-i}$ et par linéarité du déterminant par rapport aux n dernières lignes, on obtient

$$\det \mathrm{A} = (a+b)^n(a-b)^n = (a^2-b^2)^n.$$

2. Ce déterminant a deux colonnes égales et est donc nul.
3. On retranche la première colonne à toutes les autres et on obtient un déterminant triangulaire : $\mathrm{D}_n = (-1)^{n-1}$.

   Pour le deuxième déterminant, on ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $n-1$ en facteur de la première colonne et on retombe sur le déterminant précédent. On obtient : $\mathrm{D}_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.
4. On ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $a+(n-1)b$ en facteur de la première colonne. On obtient

$$\mathrm{D}_n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Déterminants ($*$)

On retranche ensuite la première ligne à toutes les autres et on obtient

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

Exercice 31 ($\det(A+(\alpha))$**) :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\det(A+\alpha U) = \det A + \alpha \sum$ cofacteurs de A.
2. En déduire la valeur de $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$,
   (a) pour $b \neq c$.
   (b) pour $b = c$.

Correction :

1. Développer.
2. (a) $\begin{cases} D(a-b,0,c-b) = (a-b)^n \\ D(a-c,b-c,0) = (a-c)^n \end{cases} \Rightarrow D(a,b,c) = \dfrac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$.
   (b) $\det((a-b)I + bU) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$.

Déterminants $(*)$