Synthèse

5 décembre 2025

Durée : **2** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **2** exercices indépendants.

Exercice 1 – Soient n un entier naturel non nul et $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On donne deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1\,;n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2, \quad p_{ij} = \mathbb{P}([\mathrm{X}=i] \cap [\mathrm{Y}=j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Pour tout $i \in [\![1\,;n+1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}=i)$. On prendra $\alpha = \dfrac{1}{2^{2n}}$.

3. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. On définit une nouvelle variable aléatoire Z par $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - 1$.
   (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire

   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.

5. On note $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{jième}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{(\mathrm{X}=j)}(\mathrm{Y}=i).$$

   (a) Calculer b_{ij} pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2$.

   (b) En déduire que $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$ puis donner $\mathbf{rg}(\mathrm{B})$, $\mathrm{Im}(\mathrm{B})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{B})$.

   (c) Déterminer une matrice colonne $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\mathrm{B} = \mathrm{CL}.$$

Exercice 2 – On admettra dans cet exercice l'équivalent usuel :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \qquad (\star)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que (P_n) converge vers un réel strictement positif.

2. On considère la suite (I_n) telle que : $\mathrm{I}_0 = 1$, $\mathrm{I}_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2}\mathrm{I}_n$.

   (a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)v_n}$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par la relation de récurrence :

   $$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 0,\ v_{n+1} = \left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right)v_n.$$

   (b) Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)\right)$.

   (c) En déduire qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell n}$.

3. On note $\alpha_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$.

   (a) Montrer que $2n\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{n} - \dfrac{1}{6} + \mathrm{o}(1)$.

   (b) En déduire que $\Big(\cos(\alpha_n)\Big)^{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

4. On considère φ une fonction continue, décroissante, sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ telle que $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$ et on note $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) En remarquant que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha_n\right) = \cos(\alpha_n)$, montrer que :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\cos^{2n}(\alpha_n).$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   (c) Montrer aussi que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

   (d) Montrer qu'il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall\, t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|\varphi(t)| \leqslant \mathrm{M}$.

(e) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(f) Montrer que

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(g) De l'ensemble de ces questions, en déduire que $\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.