Synthèse

Commentaires : *Ce ne sera pas votre meilleur et pas mon meilleur souvenir.*

Exercice 1 – Soient n un entier naturel non nul et $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On donne deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1\,;n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2\,, \quad p_{ij} = \mathbb{P}([\mathrm{X}=i] \cap [\mathrm{Y}=j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

Correction : Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2} p_{ij} = 1$.

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2} p_{ij} &= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\right)\\ &= \alpha \left(\sum_{i=01}^{n}\binom{n}{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\right)\\ &= \alpha\,(2^n)^2.\end{aligned}$$

On doit donc avoir $\alpha = \dfrac{1}{2^{2n}}$.

2. Pour tout $i \in [\![1\,;n+1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}=i)$. On prendra $\alpha = \dfrac{1}{2^{2n}}$.

Correction : La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([\mathrm{Y}=j])_{j\in[\![1;n+1]\!]}$ permet d'obtenir la loi de X :

$$\begin{aligned}\forall\,i \in [\![1\,;n+1]\!]\,,\ \mathbb{P}(\mathrm{X}=i) &= \sum_{j\in[\![1;n+1]\!]} \mathbb{P}([\mathrm{X}=i]\cap[\mathrm{Y}=j])\\ &= \sum_{j\in[\![1;n+1]\!]} \alpha\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.\end{aligned}$$

3. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction : Par symétrie, on a aussi

$$\forall\,j \in [\![1\,;n+1]\!]\,,\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}=j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.$$

Pour tout couple $(i, j) \in [\![1\,; n+1]\!]^2$, on alors :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j).$$

Les deux variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

4. On définit une nouvelle variable aléatoire Z par $Z = X - 1$.
   (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire

Correction : On a $Z(\Omega) = [\![0\,; n]\!]$ et, pour tout i de $[\![0\,; n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(Z = i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}.$$

La variable Z suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{2}$.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.

Correction : D'après la question précédente, on $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{n}{2}$ et par linéarité

$$\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{n}{2}.$$

Enfin, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \dfrac{n}{4}$.

5. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{(X=j)}(Y = i).$$

   (a) Calculer b_{ij} pour tout $(i, j) \in [\![1\,; n+1]\!]^2$.

Correction : Par indépendance, on a :

$$b_{ij} = \frac{\mathbb{P}([Y = i] \cap [X = j])}{\mathbb{P}([X = j])} = \mathbb{P}([Y = i]) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.$$

   (b) En déduire que $B = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$ puis donner $\mathbf{rg}(B)$, $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$.

Correction : D'après la question précédente,

$$\forall j \in [\![1\,; n+1]\!],\ b_{ij} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1} \text{ indépendant de } j$$

Synthèse

On en déduit que les colonnes de B sont toutes identiques à $\mathrm{C} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

La matrice B est donc de rang 1 et $\mathrm{Im}(\mathrm{B}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{C})$.

Ainsi, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(\mathrm{B})$ est de dimension n : c'est donc l'hyperplan de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ qui a pour équation donnée par l'une de ses lignes :

$$\begin{aligned}\ker(\mathrm{B}) &= \left\{(x_1\,;\cdots;x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \binom{n}{i}x_1 + \cdots + \binom{n}{i}x_n = 0\right\} \\ &= \{(x_1\,;\cdots;x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}\end{aligned}$$

(c) Déterminer une matrice colonne $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{B} = \mathrm{CL}$.

Correction : Un petit calcul matriciel suffit à montrer que

$$\mathrm{B} = \mathrm{CL} \quad \text{où } \mathrm{L} = (1, 1, \dots, 1).$$

Commentaires : *C'est le propre de toutes les matrices de rang* 1.

Exercice 2 – On admettra dans cet exercice l'équivalent usuel :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \qquad (\star)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

1. Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que (P_n) converge vers un réel strictement positif.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, terme général de **signe constant** d'une série de Riemann convergente.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Synthèse

De plus, le nombre P_n étant strictement positif en tant que produit de nombres qui le sont, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\mathrm{P}_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right).$$

D'après ce qui précède, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ de même que la suite $\left(\ln\left(\mathrm{P}_n\right)\right)_{n\geqslant 1}$.

Par continuité de la fonction exp, $\left(\mathrm{P}_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge donc vers $\mathrm{e}^{\ell} > 0$.

Commentaires : *Le côté strictement positif a trop souvent été oublié.*

Vous ayant répété maintes fois la phrase correcte à écrire, je reste abasourdi par votre préférence pour des phrases tout aussi fausses les unes que les autres.

2. On considère la suite (I_n) telle que : $\mathrm{I}_0 = 1$, $\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2}\mathrm{I}_n$.

   (a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{(n+1)v_n}$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par la relation de récurrence :

$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 0,\ v_{n+1} = \left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right) v_n.$$

Correction : Par récurrence comme demandé par l'énoncé, on a :

Tout d'abord, $\mathrm{I}_0\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1\times v_0}$ en posant $v_0 = 2$.

Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 0$, on ait $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{(n+1)v_n}$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation $v_{n+1} = \left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right) v_n.$.

D'après la relation de récurrence sur I_n,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{I}_{n+1} \times \frac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2}\mathrm{I}_n &= \frac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2} \times \frac{1}{(n+1)v_n} \\
&= \frac{(n+2)}{1+(n+2)^2} \times \frac{1}{v_n} \\
&= \frac{1}{(n+2)} \times \frac{(n+2)^2}{1+(n+2)^2} \times \frac{1}{v_n} \\
&= \frac{1}{(n+2)} \times \frac{1}{1+\frac{1}{(n+2)^2}} \times \frac{1}{v_n} \\
&= \frac{1}{(n+2)v_{n+1}} \quad \text{en posant } v_{n+1} = \left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right) v_n.
\end{aligned}$$

La relation est donc héréditaire. Initialisée pour $n = 0$, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier positif :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{(n+1)v_n} \text{ où } v_0 = 2 \text{ et } v_{n+1} = \left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right) v_n.$$

Synthèse

Commentaires : *La relation de récurrence ne portait pas que sur $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1}$ mais aussi sur la relation de récurrence suivie par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(b) Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$.

Correction : Une récurrence simple montre que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n > 0$. C'est encore du calcul :

$$\begin{aligned}\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right)v_n\right) - \ln(v_n)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{(n+2)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0,\end{aligned}$$

terme général de **signe constant** d'une série de Riemann convergente.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ converge.

(c) En déduire qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell n}$.

Correction : En reconnaissant une somme télescopique, la suite $\Big(\ln(v_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série de terme général $(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$.

D'après la question précédente, elle converge donc vers un réel α.

Par continuité de la fonction exp, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = e^{\alpha} > 0$ et on a :

$$\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{(n+1)v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell(n+1)}.$$

Ainsi, $\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=\sim} \frac{1}{\ell n}$.

3. On note $\alpha_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$.

(a) Montrer que $2n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{n} - \frac{1}{6} + \mathrm{o}(1)$.

Correction : Comme $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, on a :

$$\begin{aligned}2n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} 2n\ln\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{24n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 2n\left(\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{24n}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{n}-\frac{1}{6}+\mathrm{o}(1).\end{aligned}$$

Commentaires : *Vous avez trop souvent cédé à vos démons...abracadabra $\frac{1}{12}$, tour de passe-passe et hop $\frac{1}{6}$. Vous pensiez vraiment que ça passerait ?*

Synthèse

Il suffisait juste de pousser un peu le DL.

(b) En déduire que $\Big(\cos(\alpha_n)\Big)^{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction : D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,(\cos(\alpha_n))^{2n} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(n)+\ln(\cos^{2n}(\alpha_n))}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{-\sqrt{n}+\overbrace{\frac{1}{2}\ln(n)-\frac{1}{6}+\mathrm{o}(1)}^{\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(\sqrt{n})}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Donc, $\Big(\cos(\alpha_n)\Big)^{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

4. On considère φ une fonction continue, décroissante, sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ telle que $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$ et on note $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) En remarquant que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha_n\right) = \cos(\alpha_n)$, montrer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\cos^{2n}(\alpha_n).$$

Correction : La fonction $\sin^{2n}$ est croissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}-\alpha_n\right]$. Ainsi,

$$\forall\, t\in\left[0; \frac{\pi}{2}-\alpha_n\right],\ 0 \leqslant \sin^{2n}(t) \leqslant \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right) = \cos^{2n}(\alpha_n)$$

Par croissance et positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \cos^{2n}(\alpha_n)\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} 1\,\mathrm{d}t\\ 0 &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right)\cos^{2n}(\alpha_n) \leqslant \frac{\pi}{2}\cos^{2n}(\alpha_n).\end{aligned}$$

Commentaires : *Même commentaire : hop hop hop, regardez à gauche, regardez à droite et hop c'est bon :*

$$\sin(t) \leqslant 1 \implies \int_a^b \sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a).$$

(b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction : D'après la question (4c), $\cos^{2n}(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ce qui se traduit par $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \cos^{2n}(\alpha_n) = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ce qui s'écrit aussi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-a_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(c) Montrer aussi que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Correction : D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après $(\star)$ et la question précédente pour $\varphi \equiv 1$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + +\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

(d) Montrer qu'il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall\, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $|\varphi(t)| \leqslant \mathrm{M}$.

Correction : La fonction φ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème des bornes atteintes (ou de Weierstrass), la fonction φ est bornée et atteint ses bornes ce qui s'écrit :

$$\exists\, \mathrm{M} > 0, \forall\, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ |\varphi(t)| \leqslant \mathrm{M}.$$

(e) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction : D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}-a_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Donc, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Synthèse

(f) Montrer que

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Correction : Comme φ est décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\alpha_n > 0$,

$$\forall\, t \in \left[\frac{\pi}{2}-\alpha_n; \frac{\pi}{2}\right],\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right).$$

Avec $\sin^{2n}(t)$ strictement positif sur $\left[\frac{\pi}{2}-\alpha_n; \frac{\pi}{2}\right] \subset \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^{2n}(t) \leqslant \varphi(t)\sin^{2n}(t) \leqslant \varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right)\sin^{2n}(t).$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(g) De l'ensemble de ces questions, en déduire que $\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Correction :

— Comme $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}-\alpha_n = \frac{\pi}{2}$ et par continuité de φ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

— Comme $t \longmapsto \sin^{2n}(t)$ est continue non nulle sur $\left[\frac{\pi}{2}-\alpha_n; \frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.

La question précédente nous donne alors :

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Or, d'après (4c), $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

— Enfin, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Synthèse