Fonctions à deux variables

Nom : .... **Prénom :** ....

1. Complétez :

Définition 1 (Lignes de niveau) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k, ou *courbe de niveau* k, l'ensemble

$$\mathrm{L}_k = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition 2 : Pour tous $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

— *boule ouverte* de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathrm{A}, r) = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ldots\ldots\ldots \right\} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

Définition 3 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f *est continue en* $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ...

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(\mathrm{M}_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(\mathrm{M}_0))$, ...

Définition 4 (Dérivée directionnelle) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{v}(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que f *est dérivable en* A *dans la direction* $\vec{v}$ si la limite

.... = ... existe et est finie.

Le cas échéant, on appelle *dérivée de* f *en* A dans la direction $\vec{v}$ ce réel noté ....

Fonctions à deux variables

Définition 5 (Gradient) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f ...., on appelle *gradient de f en* A le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\overrightarrow{\nabla} f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 1 (Opérations sur les gradients) :

— $\overrightarrow{\nabla}(f \times g) = $ ....

— $\overrightarrow{\nabla}\left(\dfrac{1}{f}\right) = $ ....

2. Préciser le domaine de définition de la fonction suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$g : (x\,;y) \longmapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

....

....

....

....

....

3. Soit f définie par $f(x, y) = \sin^2(x) + \cos(y)$.

   Déterminer le domaine de définition D_f.

   Calculer ensuite, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition et donner $\overrightarrow{\nabla} f\left(\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

Fonctions à deux variables

Matrices et applications linéaires

Nom : .... **Prénom :** ....

1. Complétez :

Définition 1 (Surface représentative) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle *surface représentative* de f l'ensemble

$$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition 2 : Pour tous $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

— *boule fermée* de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathscr{B}}(\mathrm{A}, r) = \left\{ \mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \;/\; \ldots\ldots\ldots \right\} = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

Définition 3 (Limite (finie) en un point) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f *admet une limite* ℓ *en* M_0 si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ...

- $\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell)$, ...

Définition 4 (Dérivée directionnelle) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{v}(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que f *est dérivable en* A *dans la direction* $\vec{v}$ si la limite

.... = ... existe et est finie.

Le cas échéant, on appelle *dérivée de* f *en* A dans la direction $\vec{v}$ ce réel noté ....

Définition 5 (Gradient) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f ...., on appelle *gradient de f en* A le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\overrightarrow{\nabla} f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 1 (Opérations sur les gradients) :

— $\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + g) =$ ....

— $\overrightarrow{\nabla}(\varphi \circ f) =$ ....

2. Préciser le domaine de définition de la fonction suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$h : (x\,;y) \longmapsto \ln(x).$$

....

....

....

....

....

3. Soit f définie par $f(x, y) = x^2 y$.

Déterminer le domaine de définition D_f.

Calculer ensuite, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition et donner $\overrightarrow{\nabla} f\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right)$.

....

....

....

....

....

....

....